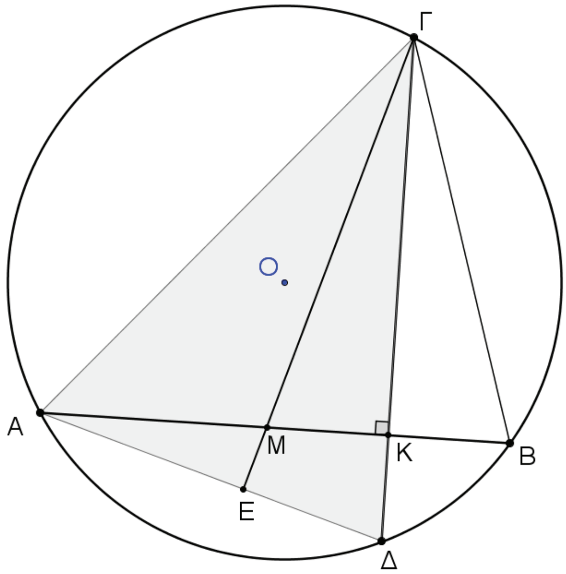


$$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} = \mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B} + \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K} = 180^0 - \Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} = 180^0 - 90^\circ = 90^\circ,$$

αφού οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$ και $\mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ είναι οι δύο οξείες γωνίες του ορθογώνιου τριγώνου ΓΚΒ. Επειδή οι δύο χορδές είναι κάθετες θα είναι και $\mathrm{AK} \perp \Gamma\Delta$, δηλαδή ΑΚ είναι επίσης ύψος του τριγώνου ΑΓΔ, οπότε το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση

$$\mathrm{A} = \frac{\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right)^m \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)^n \cdot \left(x - \frac{1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}},$$

όπου m, n ακέραιοι και x, y πραγματικοί αριθμοί με $xy \neq 0,\ xy \neq 1$ και $xy \neq -1$.

Λύση

$$\mathrm{A} = \frac{\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right)^m \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)^n \cdot \left(x - \frac{1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}} = \frac{\left(\frac{x^2y^2-1}{y^2}\right)^m \left(\frac{xy+1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(\frac{x^2y^2-1}{x^2}\right)^n \left(\frac{xy-1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}}$$

$$= \frac{\left(x^2y^2-1\right)^{m-n} \cdot x^{2n}}{y^{2m}} \cdot \frac{(xy+1)^{n-m} \cdot y^{m-n}}{(xy-1)^{m-n} \cdot x^{n-m}} \cdot \frac{y^{m+n}}{x^{m+n}}$$

$$= \frac{(xy+1)^{m-n}(xy-1)^{m-n} \cdot (xy+1)^{n-m}}{(xy-1)^{m-n}} \cdot x^{2n-2n} \cdot y^{2m-2m} = 1.$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α , β αν γνωρίζετε ότι ισχύουν:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37 .$$

Λύση

Από την ισότητα $|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta|\geq 0$ προκύπτει ότι:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow |\alpha-\beta|^2=\left(|\alpha|+|\beta|\right)^2$$

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2$$

$$-\alpha\beta=|\alpha\beta| \Leftrightarrow \left(\alpha\geq 0 \text{ και } \beta\leq 0\right) \text{ ή } \left(\alpha\leq 0 \text{ και } \beta\geq 0\right).$$

Από τη δεύτερη ισότητα λαμβάνουμε:

$$\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37 \Leftrightarrow \alpha^2\beta^2\left(\alpha+\beta+2\right)-\left(\alpha+\beta+2\right)=35$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha+\beta+2\right)\left(\alpha^2\beta^2-1\right)=35,$$

από την οποία έχουμε ότι ο $\alpha^2\beta^2-1$ είναι ένας από τους παράγοντες του 35, δηλαδή έχουμε:

$$\alpha^2\beta^2-1=\pm 1 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 5 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 7 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 35$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2=2 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=0 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=6 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=-4 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=8$$

$$\text{ή } \alpha^2\beta^2=-6 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=36 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=-34.$$

Οι αποδεκτές περιπτώσεις, αφού $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\alpha^2\beta^2\geq 0$, είναι οι:

- $\alpha^2\beta^2=0$, η οποία οδηγεί στις λύσεις $(\alpha,\beta)=(0,-37)$ ή $(\alpha,\beta)=(-37,0)$.
- $\alpha^2\beta^2=36 \Leftrightarrow \alpha\beta=-6$ (αφού α,β ετερόσημοι), η οποία οδηγεί στο σύστημα:

$$\left.\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ \alpha\beta=-6\end{cases}\right\} \Leftrightarrow (\alpha,\beta)=(-3,2) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(2,-3) .$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3α. Πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ λαμβάνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $ΕΓ=ΖΔ=\alpha$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ και ΔΕ τέμνονται στο σημείο Κ. Αν η ευθεία ΑΚ τέμνει την ευθεία ΕΖ στο σημείο Λ, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $ΑΛ\perp ΕΖ$

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΛ συναρτήσει του α.

Λύση

(α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΔΕΓ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες (ΑΔ = ΔΓ=3α, ΔΖ = ΕΓ = α). Άρα είναι ίσα και έχουν $Δ\hat{Α}Ζ=Ε\hat{Δ}Γ$. Αν Μ είναι το σημείο τομής ΑΖ και ΔΕ, τότε έχουμε:

$$Μ\hat{Δ}Ζ+Δ\hat{Ζ}Μ=Δ\hat{Α}Ζ+Δ\hat{Ζ}Α$$

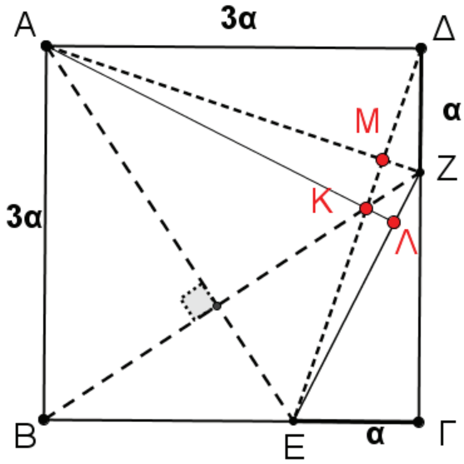
$$=180^0-Α\hat{Δ}Ζ=180^0-90^\circ=90^\circ.$$

Άρα είναι $ΕΔ\perp ΑΖ$ και ομοίως αποδεικνύουμε ότι είναι $ΖΒ\perp ΑΕ$, οπότε το σημείο Κ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΕΖ.

Άρα θα είναι και

$$ΑΚ\perp ΕΖ \text{ ή } ΑΛ\perp ΕΖ .$$

Δ



(β) Έχουμε ότι

$$(\text{ΑΕΖ})=\frac{1}{2}\cdot \text{ΕΖ}\cdot \text{ΑΛ}=\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\cdot \text{ΑΛ} \text{ και}$$

$$(\text{ΑΕΖ})=(\text{ΑΒΓΔ})-(\text{ΑΒΕ})-(\text{ΕΓΖ})-(\text{ΑΔΖ})=9\alpha^2-3\alpha^2-\alpha^2-\frac{3\alpha^2}{2}=\frac{7\alpha^2}{2},$$

οπότε λαμβάνουμε: $\text{ΑΛ}=\frac{7\sqrt{5}\alpha}{5}$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\overline{abc}=100a+10b+c$, όπου a,b,c ψηφία, $a>0$, ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα:

$$\overline{abc}=\left(a+b^2+c^3\right)^2$$

Λύση

Από τη σχέση $100\leq \overline{abc}=\left(a+b^2+c^3\right)^2<1000$ προκύπτει ότι:

$$10\leq a+b^2+c^3 \leq 31, \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1), δεδομένου ότι $a\in\{1,2,...,9\}$ και $b,c\in\{0,1,2,...,9\}$, συμπεραίνουμε ότι:

$$c\in\{0,1,2,3\} \text{ και } b\in\{0,1,2,3,4,5\}. \qquad (2)$$

Επιπλέον η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$\overline{abc}=\left(a+b^2+c^3\right)^2 \Leftrightarrow 100a+10b+c=\left(a+b^2+c^3\right)^2. \qquad (3)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Για $c=0$ η εξίσωση (3) γίνεται:

$$100a+10b=\left(a+b^2\right)^2, \qquad (4)$$

από την οποία για $b\in\{0,1,2,3,4,5\}$ δεν προκύπτουν a,b που την επαληθεύουν. Πράγματι, τα ψηφία a,b που ικανοποιούν την εξίσωση (4) πρέπει να είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $a+b^2$ να λήγει σε 0. Έτσι πιθανά ζεύγη είναι τα

$$(a,b)=(9,1) \text{ ή } (6,2) \text{ ή } (1,3) \text{ ή } (4,4) \text{ ή } (5,5),$$

από τα οποία κανένα δεν ικανοποιεί την εξίσωση (4).

- Για $c=1$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+1=\left(a+b^2+1\right)^2,$$
από την οποία προκύπτει ότι ο αριθμός $a+b^2+1$ πρέπει να λήγει σε 1 ή 9. Έτσι πιθανά ζεύγη είναι τα
$$\left(a,b\right)=\left(8,0\right) \text{ή } \left(7,1\right) \text{ ή } \left(9,1\right) \text{ ή } \left(4,2\right) \text{ή } \left(6,2\right) \text{ή } \left(1,3\right)$$
$$\text{ή } \left(9,3\right) \text{ή } \left(2,4\right) \text{ή } \left(4,4\right) \text{ή } \left(3,5\right) \text{ή } \left(5,5\right),$$
από τα οποία προκύπτει μόνο η λύση $\left(a,b\right)=\left(4,4\right)$ και ο αριθμός $\overline{abc}=441$.
- Για $c=2$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+2=\left(a+b^2+2\right)^2,$$
η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν είναι δυνατόν το τετράγωνο ενός ακεραίου να τελειώνει σε 2.
- Για $c=3$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+3=\left(a+b^2+3\right)^2,$$
η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν είναι δυνατόν το τετράγωνο ενός ακεραίου να τελειώνει σε 3.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες το σύστημα
$$x^2+4y^2=4a^2$$
$$ax-y=2a$$
έχει μία μόνο λύση.

Για τις τιμές του a που θα βρείτε να λύσετε το σύστημα.

Λύση

Το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα
$$\left\{\begin{matrix} x^2+4y^2=4a^2 \\ ax-y=2a \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y=ax-2a \\ x^2+4\left(ax-2a\right)^2=4a^2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y=ax-2a \\ \left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0 \end{matrix}\right\}.$$
Το σύστημα έχει μία μόνο λύση, αν, και μόνον αν, η εξίσωση $\left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0$ έχει μία διπλή ρίζα, δηλαδή, αν, και μόνον αν, ισχύει:
$$\Delta=16a^2\left(4a^2-3\right)=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ή } a=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } a=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
- Για $a=0$, το σύστημα έχει τη λύση $\left(x,y\right)=\left(0,0\right)$.
- Για $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ η εξίσωση $\left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0$ γίνεται $4x^2-12x+9=0$ και έχει τη διπλή ρίζα $x=\frac{3}{2}$, οπότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $\left(x,y\right)=\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, αν $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\left(x,y\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, αν $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.