

που ισχύει, γιατί είναι $\pi^2 = 3,14^2 > 3^2 = 9$, ενώ $\frac{567}{64} < 9$.

Πρόβλημα 4

Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $A = abc$, όπου a, b, c ψηφία με $a \neq 0$. Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος B που είναι μικρότερος από τον A κατά 396. Επιπλέον, αν από τον A αφαιρέσουμε 41 προκύπτει αριθμός που ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του A . Να βρείτε τον αριθμό A .

Λύση

Είναι $A = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, οπότε μετά την εναλλαγή πρώτου και τρίτου ψηφίου προκύπτει ο αριθμός $B = \overline{cba} = 100c + 10b + a$, οπότε από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$\begin{aligned} A - B = 396 &\Leftrightarrow 99(a - c) = 396 \Leftrightarrow a - c = 4 \\ &\Leftrightarrow c = a - 4. \end{aligned} \quad (1)$$

Επιπλέον δίνεται ότι

$$\begin{aligned} A - 41 = 50(a + b + c) &\Leftrightarrow 100a + 10b + c - 41 = 50a + 50b + 50c \\ &\Leftrightarrow 50a - 40b - 49c = 41, \end{aligned}$$

οπότε, λόγω της (1), λαμβάνουμε

$$50a - 40b - 49(a - 4) = 41 \Leftrightarrow a = 40b - 155. \quad (2)$$

Επειδή ο ακέραιος a είναι ψηφίο μεγαλύτερο του μηδενός, έπεται ότι

$$1 \leq a \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq 40b - 155 \leq 9 \Leftrightarrow 156 \leq 40b \leq 164 \Leftrightarrow \frac{156}{40} \leq b \leq \frac{164}{40},$$

οπότε λαμβάνουμε $b = 4$. Έτσι από τις (1) και (2) προκύπτει $a = 5$ και $c = 1$.

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $A = 541$.

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$K = (x + y)^3 - (x - y)^3 - 6x^2y - y^3.$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$A = 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64$$

είναι κύβος ακεραίου.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} K &= (x + y)^3 - (x - y)^3 - 6x^2y - y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) - 6x^2y - y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 - 6x^2y - y^3 \\ &= y^3. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$A = 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64$$

$$= (200000 + 4)^3 - (200000 - 4)^3 - 6 \cdot 200000^2 \cdot 4 - 4^3,$$

οπότε, αν θέσουμε $x = 200000$ και $y = 4$ στην προηγούμενη παράσταση, αυτή γίνεται $A = y^3 = 4^3$.

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, b ισχύει ότι

$$a^2 + b^2 - 2a = 2b + ab - 4,$$

να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$(2x - a)^3 - (x - b)^3 - x^3 = 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$a^2 + b^2 - 2a = 2b + ab - 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2^2 - ab - 2a - 2b = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-2)^2 + (2-a)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow a - b = b - 2 = 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = b = 2.$$

Τότε η εξίσωση γίνεται

$$(2x - a)^3 - (x - b)^3 - x^3 = 0 \Leftrightarrow (2x - 2)^3 - (x - 2)^3 - x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 2)^3 + (2 - x)^3 + (-x)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(2x - 2)(2 - x)(-x) = 0,$$

αφού ισχύει ότι $(2x - 2) + (2 - x) + (-x) = 0$, όπως προκύπτει άμεσα από την ταυτότητα των κύβων. Η τελευταία παραγοντοποίηση μπορεί επίσης να προκύψει εύκολα, μετά από πράξεις.

Άρα η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

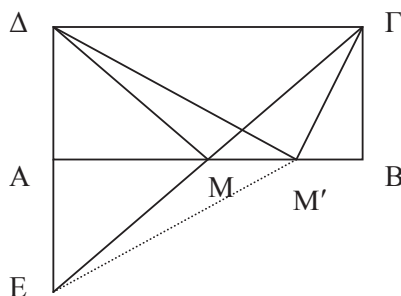
$$(2x - 2)(2 - x)(-x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \text{ ή } 2 - x = 0 \text{ ή } -x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 0.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές $AB = 2\alpha$ και $A\Delta = \alpha$. Να αποδείξετε ότι το μέσον M της πλευράς AB έχει την ιδιότητα :

το άθροισμα $\Delta M + M\Gamma$ είναι το ελάχιστο δυνατό για τις διάφορες θέσεις του σημείου M πάνω στην ευθεία AB .

Λύση



Το τρίγωνο MBΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές ($MB = B\Gamma = \alpha$), οπότε $\widehat{BM\Gamma} = 45^\circ$.
Επειδή είναι

$$\widehat{\Delta AM} + \widehat{AM\Gamma} = 90^\circ + 180^\circ - \widehat{AM\Gamma} = 225^\circ > 180^\circ,$$

η προέκταση της ΓΜ τέμνει την προέκταση της ΔΑ προς το Α, έστω στο σημείο Ε.
Τα τρίγωνα MBΓ και MAΕ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν $MA = MB$
και $\widehat{AME} = \widehat{BM\Gamma}$ (ως κατά κορυφή). Άρα θα έχουν και

$$AE = B\Gamma = \Delta\alpha.$$

Τότε όμως και τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια στο Α και έχουν την πλευρά ΑΜ κοινή και $AE = \Delta\alpha$. Άρα θα έχουν και $\Delta M = EM$, οπότε

$$\Delta M + M\Gamma = EM + M\Gamma = E\Gamma. \quad (1)$$

Έστω τώρα τυχόν σημείο Μ' της ευθείας ΑΒ διαφορετικό από το σημείο Μ. Τότε προφανώς τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜ'Δ και ΑΜ'Ε είναι ίσα, οπότε θα έχουν $AM' = EM'$ και

$$\Delta M' + M'\Gamma = EM' + M'\Gamma. \quad (2)$$

Επειδή η γραμμή ΕΜ'Γ είναι τεθλασμένη, ενώ η γραμμή ΕΜΓ είναι ευθεία που έχει τα ίδια άκρα με την τεθλασμένη ΕΜ'Γ, από τις (1) και (2) έπεται ότι

$$\Delta M + M\Gamma = E\Gamma < EM' + M'\Gamma = \Gamma M' + M'\Delta.$$

Πρόβλημα 4

Αν οι αριθμοί x, y, z είναι τέτοιοι ώστε $x > 0, y+1 > 0, z+2 > 0$ και $x+y+z=3$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} + \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} + \frac{x(z+2)}{x+z+2} \leq 3.$$

Για ποιες τιμές των x, y, z ισχύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή τα κλάσματα του πρώτου μέλους της ζητούμενης ανισότητας παρουσιάζουν στον αριθμητή το άθροισμα δύο θετικών αριθμών και στον παρανομαστή το γινόμενό τους, θεωρούμε τη γνωστή ανισότητα

$$(a+b)^2 \geq 4ab, \text{ για κάθε } a, b \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

η οποία αληθεύει, αφού είναι ισοδύναμη με την προφανή ανισότητα $(a-b)^2 \geq 0$. Η ισότητα αληθεύει όταν $a=b$. Για a, b θετικούς, από την (1) λαμβάνουμε

$$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}, \quad (2)$$

ενώ η ισότητα αληθεύει όταν $a=b$.

Από την (2) για $a=x, b=y+1$ λαμβάνουμε

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} \leq \frac{x+y+1}{4} \quad (3)$$

και ομοίως προκύπτουν οι ανισότητες

$$\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} \leq \frac{y+z+3}{4}, \quad (4)$$

$$\frac{x(z+2)}{x+z+2} \leq \frac{x+z+2}{4}. \quad (5)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (3), (4) και (5) λαμβάνουμε

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} + \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} + \frac{x(z+2)}{x+z+2} \leq \frac{2(x+y+z)+6}{4}$$

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} + \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} + \frac{x(z+2)}{x+z+2} \leq \frac{2 \cdot 3 + 6}{4} = 3.$$

Η ισότητα αληθεύει όταν $x = y+1 = z+2$, οπότε από την σχέση $x+y+z=3$ προκύπτει ότι $x+x-1+x-2=3 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$ και $y=1, z=0$.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε την εξίσωση

$$x^2 + 2 = 3\sqrt{3x-2}.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Θα αναζητήσουμε λύσεις που ικανοποιούν την ανίσωση

$$3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}.$$

Επειδή και τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι θετικά, η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$(x^2 + 2)^2 = 9(3x-2) \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 27x + 22 = 0. \quad (1)$$

Οι πιθανές ακέραιες λύσεις της (1) είναι οι : 1, -1, 2, -2, 11, -11, 22, -22.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ο ακέραιος 1 είναι ρίζα της εξίσωσης και μέσω του σχήματος Horner καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(x-1)(x^3 + x^2 + 5x - 22) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι το σχήμα Horner για $x=2$, για το πολυώνυμο

$x^3 + x^2 + 5x - 22$ καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(x-1)(x+2)(x^2 + 3x + 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x^2 + 3x + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2,$$

αφού το τριώνυμο $x^2 + 3x + 11 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -35 < 0$.

2^{ος} τρόπος

Ομοίως πρέπει $x \geq \frac{2}{3}$. Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό

$$y = \sqrt{3x-2}, \text{ για } x \geq \frac{2}{3}.$$

Τότε λαμβάνουμε

$$y \geq 0 \text{ και } y^2 = 3x-2,$$

ενώ η δεδομένη εξίσωση γίνεται

$$x^2 + 2 = 3y.$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 = 3y-2 \\ y^2 = 3x-2 \end{cases} \text{ με } x \geq \frac{2}{3} \text{ και } y \geq 0.$$