και $\mathrm{KK}_1 + \Lambda\Lambda_1 = \frac{1}{2}(MK + M\Lambda) = \frac{1}{2}3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Άρα είναι $(\mathrm{KK}_1\Lambda\Lambda_1) = \frac{1}{2}(\mathrm{KK}_1 + \Lambda\Lambda_1)\mathrm{K}_1\Lambda_1 = \frac{27\sqrt{3}}{8}$.

4. Αν υποθέσουμε ότι όλοι οι μαθητές έχουν διαφορετικό αριθμό τετραδίων, τότε ο ελάχιστος αριθμός τετραδίων που μπορούν να έχουν όλοι μαζί είναι

$$1 + 2 + \cdots + 15 = 120 > 115.$$

Άρα δεν είναι δυνατόν να έχουν όλοι οι μαθητές διαφορετικό αριθμό τετραδίων, οπότε δύο τουλάχιστον θα έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. (i) Λαμβάνοντας υπόψη τις ανισότητες $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$ εύκολα βρίσκουμε ότι $\mathrm{K} = \gamma$, οπότε $\beta < \mathrm{K} < \delta$.

(ii) Έχουμε

$$x - y = (\alpha+\beta)(\gamma+\delta) - (\alpha+\gamma)(\beta+\delta) = \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\beta - \gamma\delta$$
$$= \alpha(\gamma-\beta) + \delta(\beta-\gamma) = (\gamma-\beta)(\alpha-\delta) < 0.$$

Άρα είναι $x - y < 0$ δηλαδή $x < y$.

Ομοίως λαμβάνουμε $y - z = (\delta-\gamma)(\alpha-\beta) < 0$.

2. Επειδή είναι $\widehat{\mathrm{MB\Gamma}} = \widehat{\mathrm{M\Gamma B}}$, το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{MB} = \mathrm{M\Gamma}. \qquad (1)$$

Επιπλέον, τα τρίγωνα ΜΑΔ και ΜΑΕ είναι ίσα γιατί έχουν:

ΑΜ κοινή πλευρά, ΑΔ = ΑΕ, $\widehat{\mathrm{MA\Delta}} = \widehat{\mathrm{MAE}}$.

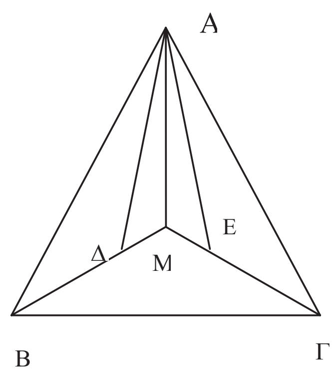
Άρα θα έχουν και

$$\widehat{\mathrm{AM\Delta}} = \widehat{\mathrm{AME}}. \qquad (2)$$

Λόγω των (1) και (2) τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑΓ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

ΑΒ =ΑΓ,

δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



3. Επειδή είναι $x, y > 0$ έχουμε

$$x^3 + y^2 \le 64 \Rightarrow x^3 < 64 \text{ και } y^2 < 64 \Rightarrow x < 4 \text{ και } y < 8 \Rightarrow x^4 < 4x^3 \text{ και } y^3 < 8y^2,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$x^4 + y^3 < 4x^3 + 8y^2 < 8(x^3 + y^2) \le 8 \cdot 64 = 512.$$

4. Αν υποθέσουμε ότι παίρνουμε x κέρματα του ενός ευρώ, y χαρτονομίσματα των 10 ευρώ και z χαρτονομίσματα των 100 ευρώ, τότε θα έχουμε τις ισότητες

$$x + 10y + 100z = 50000 \quad \text{και} \quad x + y + z = 1000, \qquad (1)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$9y+99z=49000 \Rightarrow 9\cdot(y+11z)=49000 \Rightarrow 9|49000,$$

που είναι άτοπο, γιατί το άθροισμα των ψηφίων του 49000 είναι ο αριθμός 13 που δεν διαιρείται με το 9.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

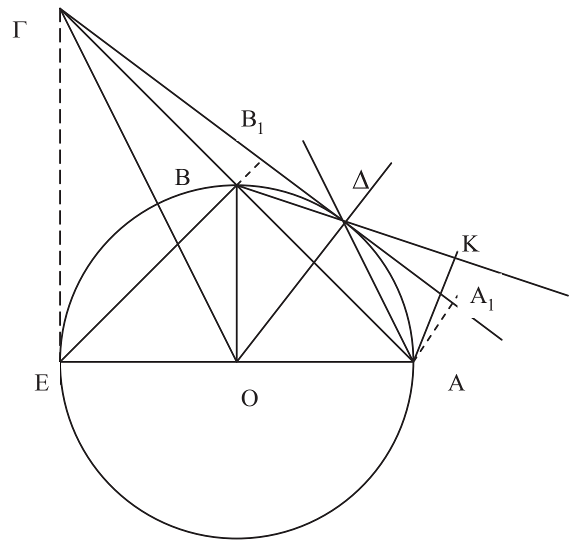
1. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\mathrm{P}(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3). \qquad (1)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{K}(x_1,x_2,x_3)&=(1-x_1)(1+x_1)(1-x_2)(1+x_2)(1-x_3)(1+x_3)\\&=(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\\&=\mathrm{P}(1)\left[-(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)\right]\\&=-\mathrm{P}(1)\mathrm{P}(-1)=-(1+\kappa+\lambda)(-1-\kappa+\lambda)=(1+\kappa)^2-\lambda^2.\end{aligned}$$

2.



1^{ος} Τρόπος

Έχουμε: $\Gamma\Delta^2=\Gamma\mathrm{A}\cdot\Gamma\mathrm{B}=2\mathrm{R}\sqrt{2}\cdot\mathrm{R}\sqrt{2}=4\mathrm{R}^2\Rightarrow\Gamma\Delta=2\mathrm{R}=2\cdot\mathrm{O}\Delta.$

Επειδή επιπλέον $\mathrm{O}\hat{\Delta}\Gamma=90^{\circ}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overset{\Delta}{\mathrm{O}\Gamma\Delta}\approx\overset{\Delta}{\mathrm{AKB}}$ ή ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\mathrm{O}\hat{\Gamma}\Delta=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$.

Πράγματι αν Ε είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του Α ως προς τον κύκλο Ο, τότε:

$$\mathrm{OB}\parallel\mathrm{E}\Gamma\Rightarrow\mathrm{E}\Gamma\perp\mathrm{OE}\Rightarrow\mathrm{O}\Delta\Gamma\mathrm{E}\ \text{εγγεγραμμένο τετράπλευρο}$$

$$\Rightarrow\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}\Rightarrow2\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{O}=2\cdot\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$$

$$\Rightarrow\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{O}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$$

2^{ος} Τρόπος