



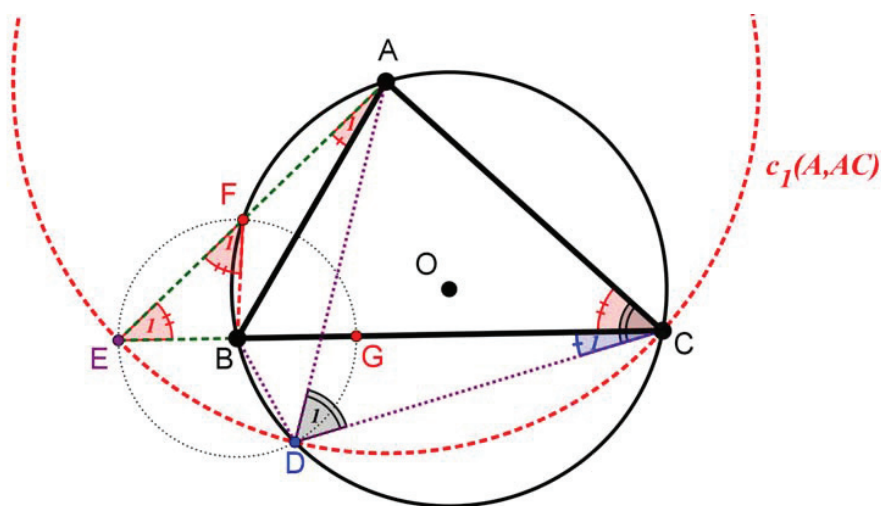
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
 34^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
 4 Μαρτίου 2017

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC με $AB < AC < BC$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Ο κύκλος $c_1(A,AC)$ τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο D και την προέκταση της πλευράς CB στο σημείο E. Αν η ευθεία AE τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο F και G είναι το συμμετρικό του E ως προς το B, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο FEDG είναι εγγράμιμο.

Λύση (1^{ος} τρόπος)



Σχήμα 1

Το τετράπλευρο AFBC είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (c), άρα: $\hat{F}_1 = \hat{A}CB = \hat{C}$.

Το τρίγωνο AEC είναι ισοσκελές (οι AE και AC είναι ακτίνες του κύκλου (c_1)) άρα:

$$\hat{E}_1 = \hat{A}CB = \hat{C}.$$

Από τις ισότητες των γωνιών προκύπτει ότι $\hat{F}_1 = \hat{E}_1$, οπότε το τρίγωνο BEF είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια:

$$BE=BF \quad (1).$$

Ονομάζουμε $\hat{C}_1 = x$ και από τον κύκλο (c_1) θα έχουμε ότι $E\hat{A}D = 2x$, (ως επίκεντρο), οπότε

$$\widehat{EAB} + \widehat{BAD} = 2x \quad (2)$$

Επιπλέον, από τον κύκλο (c) έχουμε ότι:

$$\widehat{BAD} = \widehat{C}_1 = x \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) έχουμε ότι $\widehat{EAB} = \widehat{BAD} = x$, οπότε η AB είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο EAD. Συνεπώς είναι μεσοκάθετος της ED, άρα

$$BE = BD. \quad (4)$$

Από τις ισότητες (1) και (4), καθώς και από την προφανή (λόγω συμμετρίας) ισότητα $BE = BG$, συμπεραίνουμε ότι $BE = BF = BG = BD$, οπότε το τετράπλευρο DEFG είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο το B.

2^{ος} τρόπος. Το τετράπλευρο AFBC είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (c), άρα:

$$\widehat{F}_1 = \widehat{ACB} = \widehat{C}.$$

Το τρίγωνο AEC είναι ισοσκελές (οι AE και AC είναι ακτίνες του κύκλου (c₂)) άρα:

$$\widehat{E}_1 = \widehat{ACB} = \widehat{C}.$$

Από τις ισότητες των γωνιών προκύπτει ότι $\widehat{F}_1 = \widehat{E}_1$, οπότε το τρίγωνο BEF είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια:

$$BE = BF \quad (5).$$

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABDC έχουμε: $\widehat{D}_1 = \widehat{ABC} = \widehat{B}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ADC έχουμε: $\widehat{D}_1 = \widehat{ACD}$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών, έχουμε ότι $\widehat{ACD} = \widehat{B}$ και κατά συνέπεια

$$\widehat{C}_1 = \widehat{B} - \widehat{C}.$$

Από το τρίγωνο ABE έχουμε: $\widehat{A}_1 = \widehat{B} - \widehat{E}_1 = \widehat{B} - \widehat{C}$, οπότε: $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 = \widehat{B} - \widehat{C}$ και επειδή οι γωνίες $\widehat{A}_1, \widehat{C}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c), θα ισχύει:

$$BD = BF \quad (6).$$

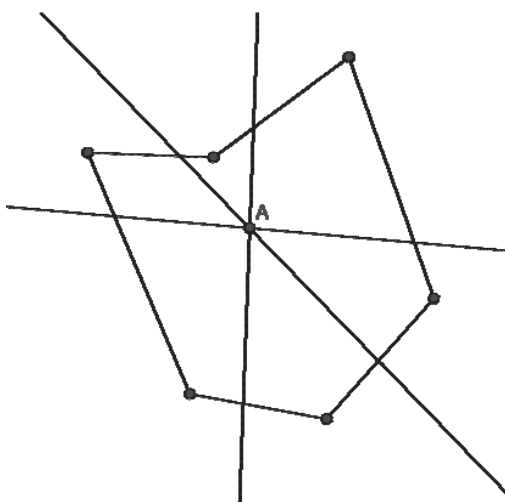
Από τις ισότητες (5) και (6), καθώς και από την προφανή (λόγω συμμετρίας) ισότητα $BE = BG$, συμπεραίνουμε ότι $BE = BF = BG = BD$, οπότε το τετράπλευρο DEFG είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο το B.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε σημείο A του επιπέδου και τρεις ευθείες που περνούν από αυτό και χωρίζουν το επίπεδο σε 6 τομείς. Σε κάθε τομέα υπάρχουν στο εσωτερικό του 5 σημεία. Υποθέτουμε ότι τα 30 σημεία που βρίσκονται στους 6 τομείς είναι ανά τρία μη συνευθειακά. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 1000 τρίγωνα με κορυφές τα σημεία αυτά (των 6 τομέων) το οποία περιέχουν το A είτε στο εσωτερικό τους είτε στις πλευρές τους.

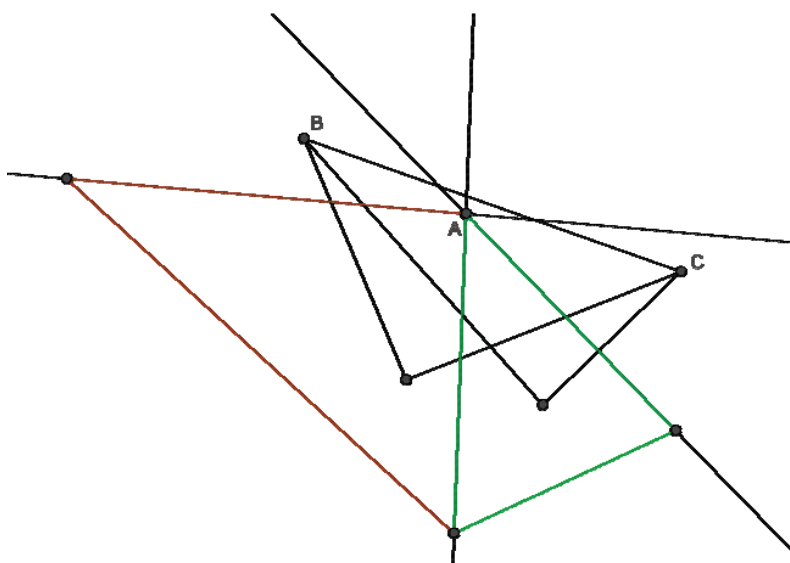
Λύση

Παρατηρούμε αρχικά ότι οποιαδήποτε για οποιαδήποτε επιλογή 6 σημείων, ένα από κάθε τομέα, δημιουργείται ένα εξάγωνο (κυρτό ή μη κυρτό) το οποίο περιέχει το σημείο A.



Σχήμα 2

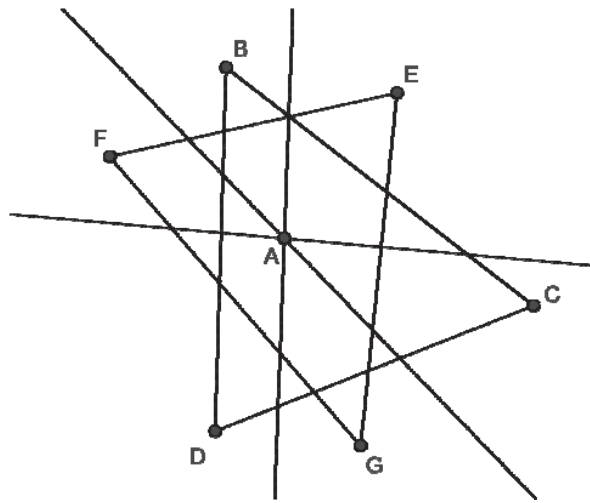
Από τα 6 αυτά σημεία δημιουργούνται $\binom{6}{3} = 20$ τρίγωνα σε σύνολο. Θα υπολογίσουμε πόσα τουλάχιστον από αυτά περιέχουν το σημείο A. Αν έχω δύο σημεία από κατά κορυφή τομείς, τότε παρατηρώ ότι έχω επιλογή για την τρίτη κορυφή του τριγώνου από δύο τομείς. Για παράδειγμα, για τα σημεία B, C του παρακάτω σχήματος, όποιο σημείο και πάρουμε από τον κόκκινο ή τον πράσινο τομέα έχουμε τρίγωνο που περιέχει το σημείο A.



Σχήμα 3

Υπάρχουν 3 ζεύγη κατά κορυφή τομέων, επομένως και έχουμε $5 \cdot 5$ επιλογές για τη βάση BC και η τρίτη κορυφή επιλέγεται με $2 \cdot 5$ τρόπους. Επομένως έχουμε συνολικά τουλάχιστον $3 \cdot 2 \cdot 5^3 = 6 \cdot 5^3$ τέτοια τρίγωνα που περιέχουν το A .

Αν τώρα έχω κορυφές σε εναλλάξ τομείς (όπως φαίνεται παρακάτω), τότε πάλι έχω τρίγωνο που περιέχει το σημείο A. Αυτά μπορεί να είναι είτε σαν το CBD είτε σαν το EFG.



Σχήμα 4

Σαν το CBD υπάρχουν $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ τρίγωνα που περιέχουν το σημείο A και σαν το EFG υπάρχουν επίσης $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ τρίγωνα που περιέχουν το σημείο A. Συνολικά σε αυτή την περίπτωση έχουμε $2 \cdot 5^3$ τρίγωνα που περιέχουν το σημείο A.

Αθροίζοντας, έχουμε τουλάχιστον $6 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^3 = 8 \cdot 5^3 = 1000$ τρίγωνα τα οποία περιέχουν το A είτε στο εσωτερικό τους είτε πάνω στις πλευρές τους.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν όλες οι τριάδες ακεραίων (a, b, c) με $a > 0 > b > c$, που έχουν άθροισμα ίσο με μηδέν και ο αριθμός $N = 2017 - a^3b - b^3c - c^3a$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Λύση

Αφού $a + b + c = 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} a^3b + b^3c + c^3a &= a^3b + b^3(-a-b) + (-a-b)^3a = -b^4 - 2b^3a - 3a^2b^2 - 2a^3b - a^4 = \\ &= -(a^2 + ab + b^2)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Επομένως, αν $2017 - a^3b - b^3c - c^3a = k^2$, τότε

$$2017 + (a^2 + ab + b^2)^2 = k^2 \Leftrightarrow (k - a^2 - ab - b^2)(k + a^2 + ab + b^2) = 2017 \quad (2)$$

Αφού ο 2017 είναι πρώτος, θα πρέπει

$$\begin{cases} k - a^2 - ab - b^2 = 1 \\ k + a^2 + ab + b^2 = 2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - a^2 - ab - b^2 = 1 \\ 2k = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1008 \\ k = 1009 \end{cases} \quad (3)$$

Για να ισχύει

$$a^2 + ab + b^2 = 1008 \quad (4)$$

πρέπει οι a, b να είναι και οι δύο άρτιοι, διαφορετικά, το αριστερό μέλος είναι περιττός. Επιπλέον, έχουμε ότι $9 \mid 1008$, άρα $9 \mid a^2 + ab + b^2$, οπότε πρέπει $3 \mid a$ και $3 \mid b$. Επομένως, οι a, b διαιρούνται από 6, οπότε γράφουμε $a = 6m$ και $b = 6n$, οπότε η (1) γίνεται

$$m^2 + mn + n^2 = 28 \quad (5)$$

Ομοίως, οι m, n πρέπει να είναι άρτιοι, οπότε $m = 2x$ και $n = 2y$. Τότε η (7) γίνεται

$$x^2 + xy + y^2 = 7 \quad (6)$$

Για να έχει ακέραιες λύσεις η τελευταία πρέπει η διακρίνουσα ως προς y να είναι μη αρνητική και τέλειο τετράγωνο. Όμως $\Delta = x^2 - 4(x^2 - 7) = 28 - 3x^2$, οπότε:

$$x^2 = 1 \text{ ή } x^2 = 4 \text{ ή } x^2 = 9.$$

Επειδή, $a > 0$ θα έχουμε $x > 0$, οπότε $x \in \{1, 2, 3\}$. Επειδή $y < 0$, παίρνουμε τα ζεύγη $(x, y) \in \{(1, -3), (2, -3), (3, -2), (3, -1)\}$, οπότε, αφού $a = 12x$, $b = 12y$ έχουμε ότι

$$(a, b) \in \{(12, -36), (24, -36), (36, -24), (36, -12)\}$$

Λόγω του ότι $a + b + c = 0$ και του περιορισμού $a > 0 > b > c$, έχουμε τη μοναδική λύση

$$(a, b, c) = (36, -12, -24).$$

Πρόβλημα 4. Έστω ξ η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 + x - 4 = 0$. Το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, όπου n θετικός ακέραιος, έχει συντελεστές μη αρνητικούς ακέραιους και αριθμητική τιμή $P(\xi) = 2017$.

(i) Να αποδείξετε ότι: $a_0 + a_1 + \dots + a_n \equiv 1 \pmod{2}$

(ii) Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος: $a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

Λύση

(i) Επειδή ο αριθμός $\xi = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ είναι άρρητος και το πολυώνυμο $F(x) = P(x) - 2017$ έχει ρητούς συντελεστές και ρίζα τον αριθμό ξ , θα έχει ρίζα και τον συζυγή του $\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$, οπότε θα διαιρείται με το πολυώνυμο $\varphi(x) = x^2 + x - 4$.

Αυτό προκύπτει άμεσα από την ταυτότητα της διαίρεσης

$$F(x) = P(x) - 2017 = (x^2 + x - 4)Q(x) + \kappa x + \lambda,$$

Από την οποία για $x = \xi$ λαμβάνουμε $\kappa \xi + \lambda = 0$, από την οποία προκύπτει ότι $\kappa = \lambda = 0$, αφού ο αριθμός ξ είναι άρρητος.

Άρα υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(x) - 2017 = (x^2 + x - 4)Q(x) \\ \Leftrightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 - 2017 &= (x^2 + x - 4)Q(x) \end{aligned} \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) για $x = 1$ λαμβάνουμε:

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n - 2017 = -2Q(1)$$

$$\Rightarrow a_0 + a_1 + \dots + a_n = 2017 - 2Q(1) \equiv 1 \pmod{2}$$

(ii) Θεωρούμε το σύνολο $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ με στοιχεία μη αρνητικούς ακέραιους που ικανοποιούν τα παρακάτω:

(α) $a_n \xi^n + a_{n-1} \xi^{n-1} + \dots + a_1 \xi + a_0 = 2017$

(β) το άθροισμα $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ είναι το ελάχιστο δυνατό.

Παρατηρούμε πρώτα ότι αληθεύει η σχέση:

$$0 \leq a_i \leq 3, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, n-2.$$

Πράγματι, αν ήταν διαφορετικά για κάποιο $i = 1, 2, \dots, n-2$, τότε το σύνολο

$$\{a_0, \dots, a_{i-1}, a_i - 4, a_{i+1} + 1, a_{i+2} + 1, a_{i+3}, \dots, a_n\}$$

θα είχε στοιχεία μη αρνητικούς ακέραιους, θα ικανοποιούσε τη σχέση (α), ενώ θα είχε άθροισμα στοιχείων μικρότερο από αυτό του συνόλου $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, που είναι άτοπο.

Έστω τώρα $Q(x) = b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$. Τότε από την ταυτότητα

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 - 2017 = (x^2 + x - 4)(b_{n-2} x^{n-2} + b_{n-3} x^{n-3} + \dots + b_1 x + b_0)$$

προκύπτουν οι ισότητες:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 - 2017 = -4b_0 \\ a_1 = -4b_1 + b_0 \\ a_2 = -4b_2 + b_1 + b_0 \\ a_3 = -4b_3 + b_2 + b_1 \\ \dots \\ a_{n-2} = -4b_{n-2} + b_{n-3} + b_{n-4} \\ a_{n-1} = b_{n-2} + b_{n-3} \\ a_n = b_{n-2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 - 2017 = -4b_0 \\ a_1 - b_0 = -4b_1 \\ a_2 - b_1 - b_0 = -4b_2 \\ a_3 - b_2 - b_1 = -4b_3 \\ \dots \\ a_{n-2} - b_{n-3} - b_{n-4} = -4b_{n-2} \\ a_{n-1} - b_{n-2} = b_{n-3} \\ a_n = b_{n-2} \end{array} \right\}$$

Γενικά ισχύει ότι: $a_{i+2} - b_{i+1} - b_i = -4b_{i+2}$, για κάθε $i = 0, 1, \dots, n-4$

Επειδή είναι $0 \leq a_i \leq 3$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n-2$, από την πρώτη εξίσωση από τις παραπάνω προκύπτει ότι $a_0 = 1$ και $b_0 = 504$. Από τη δεύτερη εξίσωση λαμβάνουμε $a_1 = 0$ και $b_1 = 126$. Από την τρίτη εξίσωση λαμβάνουμε $a_2 = 2$ και $b_2 = 157$.

Συνεχίζοντας ομοίως λαμβάνουμε τα σύνολα

$$\{b_0, b_1, b_2, \dots, b_{14}\} = \{504, 126, 157, 70, 56, 31, 21, 13, 8, 5, 3, 2, 1, 0, 0\}$$

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{14}\} = \{1, 0, 2, 3, 3, 2, 3, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 3, 1\}$$

Επομένως η ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ είναι **23**.