Ενδεικτικές λύσεις θεμάτων μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1
Βρείτε όλα τα πολυώνυμα $\mathrm{P}(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$\left(x^2-6x+8\right)\mathrm{P}(x)=\left(x^2+2x\right)\mathrm{P}(x-2),$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση
Η δεδομένη ισότητα γράφεται στη μορφή

$$(x-2)(x-4)\mathrm{P}(x)=x(x+2)\mathrm{P}(x-2),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},\qquad (1)$$

οπότε, για $x=0,-2$ και 4 προκύπτουν οι ισότητες: $\mathrm{P}(0)=\mathrm{P}(-2)=\mathrm{P}(2)=0$.

Επομένως το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ έχει παράγοντες τους $x, x+2$ και $x-2$, οπότε έχουμε:

$$\mathrm{P}(x)=x(x+2)(x-2)Q(x),\qquad (2)$$

όπου το $Q(x)$ είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές.
Λόγω της (2) η σχέση (1) γίνεται:

$$(x-2)(x-4)^2x(x+2)Q(x)=x(x+2)(x-2)x(x-4)Q(x-2),\qquad (3)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ισοδύναμα, έχουμε

$$x(x+2)(x-2)(x-4)\left[(x-2)Q(x)-xQ(x-2)\right]=0,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.\qquad (4)$$

Από τη σχέση (4), επειδή το πολυώνυμο $x(x-2)(x+2)(x-4)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, προκύπτει η ισότητα:

$$(x-2)Q(x)-xQ(x-2)=0,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.\qquad (5)$$

Από την τελευταία σχέση για $x=0$ λαμβάνουμε ότι $Q(0)=0$, οπότε $Q(x)=xR(x)$, όπου $R(x)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Λόγω της (5) η σχέση (4) γίνεται:

$$(x-2)xR(x)-x(x-2)R(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-2)\left[R(x)-R(x-2)\right]=0,$$

από την οποία, αφού $x(x-2)\neq 0(x)$, προκύπτει ότι:

$$R(x)=R(x-2),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $R(x)=R(x+2k),\ k\in\mathbb{Z},$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε το πολυώνυμο $R(x)$ παίρνει την ίδια τιμή για άπειρες τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για παράδειγμα ισχύει $c=R(0)=R(2k), k\in\mathbb{Z}$. Άρα είναι $R(x)=c,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$$\mathrm{P}(x)=x(x+2)(x-2)Q(x)=x(x+2)(x-2)xR(x)=cx^2\left(x^2-4\right).$$

Πρόβλημα 2

Βρείτε τις τιμές του ακέραιου αριθμού n για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A}=\dfrac{8n-25}{n+5}$ ισούται με τον κύβο ρητού αριθμού.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Έστω $p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0$, με $(p,q)=1$ και τέτοιοι ώστε

$$\mathrm{A}=\frac{8n-25}{n+5}=\left(\frac{p}{q}\right)^3. \qquad (1)$$

Τότε θα είναι και $(p^3,q^3)=1$, ενώ από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$q^3(8n-25)=p^3(n+5), \qquad (2)$$

από την οποία έπεται ότι

$$p^3\,|\,(8n-25) \text{ και } q^3\,|\,(n+5)\Rightarrow \text{υπάρχει } k\in\mathbb{Z} \text{ έτσι ώστε:}$$

$$8n-25=kp^3 \text{ και } n+5=kq^3. \qquad (3)$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $8n-25=kp^3,\ k\in\mathbb{Z}$, τότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε τις σχέσεις (3). Από τις σχέσεις (3) προκύπτει ότι:

$$8(n+5)-(8n-25)=k(8q^3-p^3)$$

$$\Rightarrow k(2q-p)(4q^2+2qp+p^2)=65.$$

Επομένως οι αριθμοί $k,\ 2q-p$ και $4q^2+2qp+p^2$ είναι διαιρέτες του 65. Παρατηρούμε όμως ότι $4q^2+2pq+p^2=3q^2+(p+q)^2\equiv 1(\bmod 3)$ και επιπλέον ισχύει $4q^2+2pq+p^2=3q^2+(p+q)^2\geq 3$, οπότε, αφού ο αριθμός $4q^2+2pq+p^2$ είναι διαιρέτης του 65 η μοναδική δυνατή τιμή του είναι

$$4q^2+2pq+p^2=13\Leftrightarrow 3q^2+(p+q)^2=13,$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- $4q^2+2qp+p^2=13,\ k=\pm 1,\ 2q-p=\pm 5.$ Τότε έχουμε:

$p=2q\mp 5$ και $4q^2+2q(2q\mp 5)+(2q\mp 5)^2=13\Leftrightarrow p=2q\mp 5,\ 2q^2\mp 5q+2=0$

$\Leftrightarrow p=2q\mp 5,\ q=\pm 2\Leftrightarrow p=\mp 1,\ q=\pm 2$. Τότε και για τις δύο περιπτώσεις έχουμε

$\left(\dfrac{p}{q}\right)^3=-\dfrac{1}{8}$, οπότε θα είναι: $\dfrac{8n-25}{n+5}=-\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow 8(8n-25)=-(n+5)\Leftrightarrow n=3$.

2^{ος} τρόπος

Όπως στον πρώτο τρόπο φθάνουμε στη σχέση (2) και τη λύνουμε ως προς n, οπότε λαμβάνουμε:

$$n=\frac{5(5q^3+p^3)}{8q^3-p^3}. \qquad (4)$$

Έστω $d=(5q^3+p^3,8q^3-p^3)$. Τότε $d\,|\,5q^3+p^3+8q^3-p^3=13q^3$ και αφού $(p,q)=1$ έπεται ότι $d\,|\,13$. Επομένως

$$\frac{8q^3-p^3}{d}\Big|5\Rightarrow(8q^3-p^3)\,|\,5\cdot 13\Rightarrow(2q-p)(4q^2+2pq+p^2)\,|\,65.$$

Παρατηρούμε ότι $4q^2+2pq+p^2=3q^2+(p+q)^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ και επιπλέον ισχύει $4q^2+2pq+p^2=3q^2+(p+q)^2 \geq 3$, οπότε, αφού ο αριθμός $4q^2+2pq+p^2$ είναι διαιρέτης του 65 η μοναδική δυνατή τιμή του είναι

$$4q^2+2pq+p^2=13 \Leftrightarrow 3q^2+(p+q)^2=13. \qquad (5)$$

Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι $|q| \leq 2$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $|q|=0$ ή $|q|=1$, οπότε $(p+q)^2=13$ ή $(p+q)^2=10$, αδύνατες με $p,q \in \mathbb{Z}$.
- Αν $|q|=2$, τότε $(p+q)^2=1$, από την οποία προκύπτουν οι λύσεις :

  $$(p,q)=(-1,2) \text{ ή } (p,q)=(1,-2) \text{ ή } (p,q)=(-3,2) \text{ ή } (p,q)=(3,-2).$$

  Επειδή $(2q-p)|65$, δεκτές είναι μόνο οι λύσεις $(p,q)=(-1,2)$ ή $(p,q)=(1,-2)$, από τις οποίες προκύπτει ότι $n=3$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε μια $n \times n$ σκακιέρα, όπου n άρτιος θετικός ακέραιος, στην οποία τοποθετούνται όλοι οι αριθμοί $1,2,3,\ldots,n^2$, ένας σε κάθε τετραγωνάκι. Καλούμε S_1 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα άσπρα τετράγωνα και S_2 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα μαύρα τετράγωνα. Να βρεθούν όλοι οι αριθμοί n που είναι τέτοιοι, ώστε να είναι δυνατή μία τοποθέτηση, για την οποία ισχύει:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{39}{64}.$$

Λύση

Η δεδομένη σχέση είναι ισοδύναμη με την $S_1=\frac{39}{103}(S_1+S_2)$. Παρατηρούμε ότι :

$$S_1+S_2=1+2+\cdots+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

Επειδή ο S_1 είναι φυσικός αριθμός, από τις παραπάνω θα έχουμε ότι $103\left|\left(\frac{n^2(n^2+1)}{2}\right)\right.$. Όμως ο 103 είναι πρώτος της μορφής 4κ+3, οπότε ο 103 δεν διαιρεί τον n^2+1. Επομένως πρέπει να διαιρεί τον n^2 και αφού είναι πρώτος, πρέπει $103|n$. Αφού επιπλέον ο n είναι άρτιος, θα έχουμε ότι είναι πολλαπλάσιο του 206, δηλαδή πρέπει: $n=206k, k \in \mathbb{N}^*$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι για κάθε πολλαπλάσιο του 206 είναι δυνατή μια τέτοια τοποθέτηση. Η ελάχιστη δυνατή τιμή του S_1 είναι:

$$1+2+\cdots+\frac{n^2}{2}=\frac{\frac{n^2}{2}\left(\frac{n^2}{2}+1\right)}{2}=A,$$

ενώ η μέγιστη τιμή είναι:

$$\left(\frac{n^2}{2}+1\right)+\left(\frac{n^2}{2}+1\right)+\cdots+n^2=B.$$

Εύκολα ελέγχουμε την ανισότητα,

$$A < S_1 = \frac{39}{103}\left(S_1 + S_2\right) < B$$

Τώρα θα πάρουμε το ζητούμενο δείχνοντας ότι το S_1 μπορεί να πάρει κάθε δυνατή τιμή ανάμεσα στα A, B Πράγματι, ο αριθμός $A+1$ μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς $1,2,...,\frac{n^2}{2}-1,\frac{n^2}{2}+1$. Ο αριθμός $A+2$ μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς $1,2,...,\frac{n^2}{2}-1,\frac{n^2}{2}+2$, και ούτω καθεξής. Όταν φτάσουμε στο βήμα όπου χρειάζεται η τοποθέτηση των αριθμών $1,2,...,\frac{n^2}{2}-1,n^2$, για να πάρουμε τον επόμενο αριθμό ως άθροισμα, θα επιλέξουμε στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς $1,2,...,\frac{n^2}{2}-2,\frac{n^2}{2},n^2$, και στον επόμενο τους $1,2,...,\frac{n^2}{2}-2,\frac{n^2}{2}+1,n^2$, και ούτω καθεξής. Αυξάνοντας λοιπόν με την παραπάνω διαδικασία το άθροισμα κατά 1, ξεκινώντας από το A, μπορούμε να κατασκευάσουμε όλους τους αριθμούς μέχρι το B.

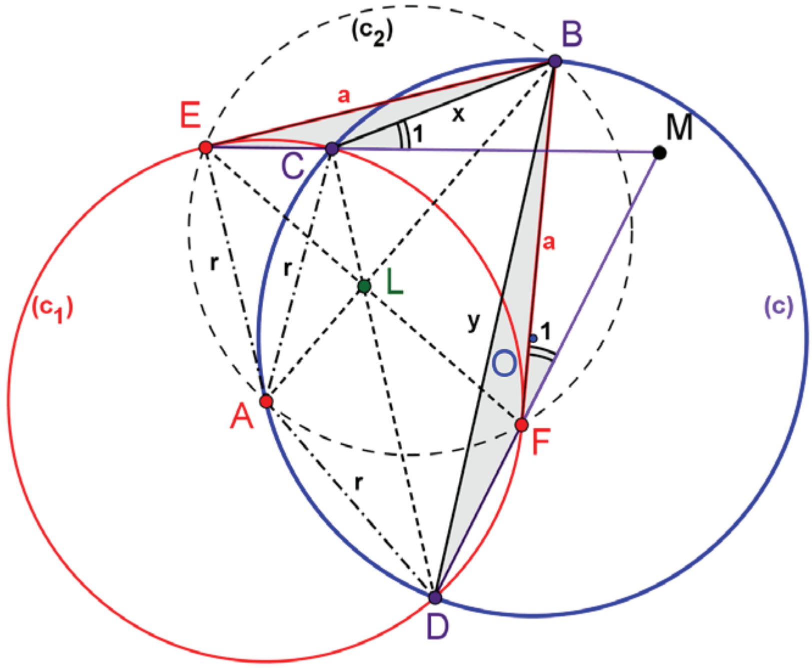
Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R) και δύο σημεία του A,B τέτοια, ώστε $R < AB < 2R$. Ο κύκλος $c_1(A,r)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα r, $0<r<R$), τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$, στα σημεία C και D (το σημείο C ανήκει στο μικρό τόξο AB). Από το σημείο B, θεωρούμε τις εφαπτόμενες BE και BF στον κύκλο $c_1(A,r)$, έτσι ώστε από τα σημεία επαφής E,F, το σημείο E βρίσκεται εκτός του κύκλου $c(O,R)$. Οι ευθείες EC και DF τέμνονται στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BCFM$ είναι εγγράψιμο.

Λύση (1ος τρόπος)

Το τετράπλευρο $AEBF$ είναι εγγράψιμο (διότι οι BE και BF είναι εφαπτόμενες, οπότε: $A\hat{E}B = A\hat{F}B = 90^o$) και έστω c_2 ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Το τμήμα CD είναι η κοινή χορδή των κύκλων (c) και (c_1). Το τμήμα AB είναι η κοινή χορδή των κύκλων (c) και (c_2). Το τμήμα EF είναι η κοινή χορδή των κύκλων (c_1) και (c_2). Άρα οι τρεις παραπάνω χορδές θα συντρέχουν στο ριζικό κέντρο, έστω L, των τριών κύκλων.

Η AB είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{B}F$ (διότι BE και BF είναι εφαπτόμενες του κύκλου $c_1(A,r)$). Η AB είναι επίσης διχοτόμος της γωνίας $C\hat{B}D$, γιατί οι γωνίες $A\hat{B}C$ και $A\hat{B}D$ είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{AC}$ και $\overset{\frown}{AD}$. Άρα οι γωνίες $E\hat{B}C$ και $F\hat{B}D$ είναι ίσες.



Σχήμα 2

Με τη βοήθεια της ισότητας $E\hat{B}C = F\hat{B}D$, θα αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα BCE και BFD είναι όμοια. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BF}{BD} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{y}{a} \Leftrightarrow xy = a^2,$$

όπου θέσαμε (χάριν συντομίας): $BE = BF = a$, $BC = x$ και $BD = y$.

Από την ομοιότητα των τριγώνων LCB και LAD έχουμε:

$$\frac{LC}{LA} = \frac{CB}{AD} \Rightarrow \frac{LC}{LA} = \frac{x}{r} \qquad (1).$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων LCA και LBD, έχουμε:

$$\frac{LB}{LC} = \frac{BD}{CA} \Rightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{y}{r} \qquad (2).$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{LB}{LA} = \frac{xy}{r^2} \qquad (\text{A}).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE, το τμήμα AL είναι το ύψος προς την υποτείνουσα, άρα:

$$\frac{LB}{LA} = \frac{EB^2}{EA^2} = \frac{a^2}{r^2} \qquad (\text{B}).$$

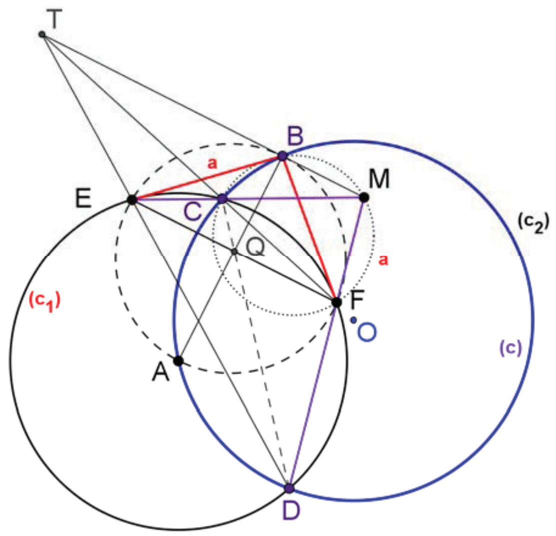
Από τις σχέσεις (A) και (B) έχουμε: $xy = a^2$.

Άρα τα τρίγωνα BCE και BFD είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις γωνίες τους ίσες (μία προς μία). Από τις ισότητες των γωνιών των τριγώνων BCE και BFD, προκύπτει η ισότητα: $\hat{C} = \hat{F}$. Άρα το τετράπλευρο $BCFM$ είναι εγγράψιμο.

2ος τρόπος.

Σημειώνουμε με Q το σημείο τομής των EF, CD Από το **θεώρημα Pascal** στο εκφυλισμένο εξάγωνο $EEDFFC$ παίρνουμε ότι, αν T είναι το σημείο τομής των

ED, CF, τότε τα σημεία T, B, M είναι συνευθειακά. Επιπλέον, στο εγγεγραμμένο $ECFD$, τα σημεία T, M είναι τα σημεία τομής των απέναντι πλευρών και το Q είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Επομένως η ευθεία TM είναι η **πολική** του Q, οπότε η AQ είναι κάθετη στην πολική (αφού Α κέντρο του κύκλου), οπότε έχουμε ότι $A\hat{B}T = 90^\circ$. Έτσι, έπεται ότι $EF \parallel TM$ αφού $AB \perp EF$, οπότε έχουμε ότι $B\hat{M}C = M\hat{E}F = C\hat{F}B$, όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τις γωνίες χορδής και εφαπτομένης.



Σχήμα 3

Παρατήρηση

Από τις ισότητες των γωνιών των τριγώνων BCE και BFD, προκύπτει επίσης ότι και το τετράπλευρο $BEDM$ είναι εγγράψιμο.