

## Θέματα μεγάλων τάξεων

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται η ακολουθία πραγματικών αριθμών  $(a_n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  με

$$a_1 = 2 \text{ και } a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}), n \geq 2.$$

Να προσδιορίσετε τον όρο  $a_{2013}$ .

### Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)

Παρατηρούμε ότι:

$$a_1 = 2, a_2 = \frac{3}{1} \cdot a_1 = 3 \cdot 2, a_3 = \frac{4}{2} \cdot (a_1 + a_2) = \frac{4}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \cdot 2^2,$$

$$a_4 = \frac{5}{3} \cdot (a_1 + a_2 + a_3) = \frac{5}{3} \cdot 24 = 5 \cdot 2^3, a_5 = \frac{6}{4} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = \frac{6}{4} \cdot 64 = 6 \cdot 2^4.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει  $a_n = (n+1) \cdot 2^{n-1}$ , για κάθε  $n = 1, 2, 3, \dots, k$ . Θα αποδείξουμε ότι ισχύει το ίδιο και για  $n = k+1$ , δηλαδή ότι ισχύει:  $a_{k+1} = (k+2) \cdot 2^k$ .

Πράγματι, έχουμε

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k) = \frac{k+2}{k} \cdot (2 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \dots + (k+1) \cdot 2^{k-1})$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k} \cdot (2 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \dots + (k+1) \cdot 2^{k-1}) \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1) επί 2, λαμβάνουμε

$$2a_{k+1} = \frac{k+2}{k} \cdot (2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + (k+1) \cdot 2^k), \quad (2)$$

οπότε με αφαίρεση της (1) από τη (2) κατά μέλη, λαμβάνουμε:

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k} \cdot (-2 - 2^1 - 2^2 - 2^3 - \dots - 2^{k-1} + (k+1) \cdot 2^k)$$

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k} \cdot \left( -1 - \frac{1-2^k}{1-2} + (k+1) \cdot 2^k \right)$$

$$= \frac{k+2}{k} \cdot (-2^k + (k+1) \cdot 2^k) = (k+2) \cdot 2^k.$$

Άρα έχουμε:  $a_{2013} = 2014 \cdot 2^{2012}$

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Θεωρούμε τις σχέσεις

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}), n \geq 2, \quad (3)$$

$$a_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n}\right)(a_1 + a_2 + \dots + a_n), n \geq 1, \quad (4)$$

από τις οποίες λαμβάνουμε

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)a_n, n \geq 2 \quad (5)$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(\frac{n}{n+2}\right) a_{n+1}, \quad n \geq 1. \quad (6)$$

Με αφαίρεση της σχέσης (5) από τη σχέση (6) κατά μέλη λαμβάνουμε

$$a_n = \left(\frac{n}{n+2}\right) a_{n+1} - \left(\frac{n-1}{n+1}\right) a_n \Rightarrow a_{n+1} = \left(\frac{2(n+2)}{n+1}\right) a_n, \quad n \geq 1 \quad (7)$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{2(n+1)}{n}\right) a_{n-1} = \left(\frac{2(n+1)}{n}\right) \left(\frac{2n}{n-1}\right) a_{n-2} = \dots \\ &= \left(\frac{2(n+1)}{n}\right) \left(\frac{2n}{n-1}\right) \dots \left(\frac{2 \cdot 4}{3}\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot 3}{2}\right) a_1 = (n+1) \cdot 2^{n-2} \cdot a_1 = (n+1) \cdot 2^{n-1}, \end{aligned}$$

αφού είναι  $a_1 = 2$ . Άρα έχουμε  $a_{2013} = 2014 \cdot 2^{2012}$ .

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο σύνολο των ακεραίων να λύσετε την εξίσωση:

$$y = 2x^2 + 5xy + 3y^2.$$

### Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$y = 2x^2 + 2xy + 3xy + 3y^2 \Leftrightarrow y = (x+y)(2x+3y). \quad (1)$$

Αν θέσουμε  $x+y=z$ , τότε πρέπει  $z \in \mathbb{Z}$  και η εξίσωση (1) γίνεται

$$y = z(2z+y) \Leftrightarrow y = 2z^2 + yz \Leftrightarrow (z-1)y = -2z^2. \quad (2)$$

Για  $z=1$  η εξίσωση (2) γίνεται  $0 \cdot y = -2$  (αδύνατη).

Για  $z \neq 1$  η εξίσωση γίνεται

$$y = -\frac{2z^2}{z-1} = -\frac{2(z^2-1)+2}{z-1} = -2(z+1) - \frac{2}{z-1}. \quad (3)$$

Για να είναι ο  $y$  ακέραιος πρέπει ο  $z-1$  να είναι διαιρέτης του 2, δηλαδή πρέπει

$$z-1 \in \{-1, 1, -2, 2\} \Leftrightarrow z \in \{0, 2, -1, 3\}.$$

- Για  $z=0$ , λαμβάνουμε τη λύση  $(x, y) = (0, 0)$ .
- Για  $z=2$ , λαμβάνουμε τη λύση  $(x, y) = (10, -8)$ .
- Για  $z=-1$ , λαμβάνουμε τη λύση  $(x, y) = (-2, 1)$ .
- Για  $z=3$ , λαμβάνουμε τη λύση  $(x, y) = (12, -9)$ .

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$y = 2x^2 + 2xy + 3xy + 3y^2 \Leftrightarrow (x+y-1)(2x+3y+2) = -2 \quad (4)$$

Επειδή ζητάμε λύσεις στους ακέραιους, οι δύο παράγοντες στο πρώτο μέρος πρέπει να είναι ακέραιοι, οπότε από την εξίσωση (4) έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\begin{cases} x+y-1 = -1 \\ 2x+3y+2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ 2x+3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

- $\begin{cases} x+y-1=1 \\ 2x+3y+2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(10,-8)$
- $\begin{cases} x+y-1=2 \\ 2x+3y+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(12,-9)$
- $\begin{cases} x+y-1=-2 \\ 2x+3y+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(-2,1)$

### 3<sup>ος</sup> τρόπος

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$2x^2 + 5yx + 3y^2 - y = 0, \quad (5)$$

δηλαδή είναι δευτεροβάθμια ως προς  $x$  με ακέραιους συντελεστές. Για να έχει η εξίσωση αυτή ακέραιες λύσεις **πρέπει** η διακρίνουσά της να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, δηλαδή πρέπει  $\Delta = y^2 + 8y = y(y+8) = \rho^2$ , όπου  $\rho$  ακέραιος.

- Αν είναι  $\rho = 0$ , τότε θα είναι  $\Delta = 0$  και  $y = 0$  ή  $y = -8$ . Για  $y = 0$ , από την εξίσωση (4) προκύπτει ότι  $x = 0$ , δηλαδή είναι  $(x,y) = (0,0)$ . Για  $y = -8$ , από την εξίσωση (4) προκύπτει ότι  $x = 10$ , οπότε έχουμε τη λύση  $(x,y) = (10,-8)$ .
- Αν είναι  $\rho \neq 0$ , τότε **πρέπει** η εξίσωση

$$y^2 + 8y - \rho^2 = 0, \quad (6)$$

να έχει ακέραιες λύσεις ως προς  $y$  για κατάλληλες τιμές του  $\rho$ . Άρα, πρέπει η διακρίνουσα της εξίσωσης (6) να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου. Άρα πρέπει να είναι  $\Delta' = 64 + 4\rho^2 = 8^2 + (2\rho)^2 = w^2$ , οπότε η τριάδα  $(8, 2\rho, w)$  πρέπει να είναι μία Πυθαγόρεια τριάδα. Όμως όλες οι Πυθαγόρειες τριάδες είναι της μορφής

$$(k \cdot (m^2 - n^2), k \cdot 2mn, k \cdot (m^2 + n^2)), \text{ όπου } k, m, n \text{ θετικοί ακέραιοι, } m > n. \text{ Άρα}$$

οι δυνατές περιπτώσεις είναι:

$$k \cdot (m^2 - n^2) = 8, k \cdot 2mn = 2\rho \quad (7)$$

$$\text{ή } k \cdot 2mn = 8, k \cdot (m^2 - n^2) = 2\rho. \quad (8)$$

Για  $k = 1$  η σχέση (7) μπορεί να αληθεύει με  $(m,n) = (3,1)$ , οπότε  $\rho = 3$ . Τότε η εξίσωση (6) γίνεται  $y^2 + 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow y = 1$  ή  $y = -9$ , δηλαδή έχει ακέραιες λύσεις. Από την εξίσωση (5) λαμβάνουμε τις λύσεις  $x = -2$ , για  $y = 1$  και  $x = 12$ , για  $y = -9$ , οπότε έχουμε τις λύσεις:  $(x,y) = (-2,1)$  και  $(x,y) = (12,-9)$ . Για  $k \geq 2$ , από το σύστημα (7) δεν προκύπτει ακέραια τιμή για το  $\rho$ . Ομοίως, από το σύστημα (8) δεν προκύπτουν ακέραιες τιμές για το  $\rho$ .

Εναλλακτικά, όταν φθάσουμε στην αναγκαία συνθήκη  $\Delta' = 64 + 4\rho^2 = w^2$  μπορούμε να συνεχίσουμε ως εξής:

$$\Delta' = 64 + 4\rho^2 = w^2 \Leftrightarrow w^2 - 4\rho^2 = 64 \Leftrightarrow (w - 2\rho)(w + 2\rho) = 64.$$

Στη συνέχεια, για την επιλογή των ακέραιων παραγόντων του πρώτου μέλους, παρατηρούμε ότι:

$$(w + 2\rho) + (w - 2\rho) = 2w = \text{πολλαπλάσιο του } 2$$

$$(w + 2\rho) - (w - 2\rho) = 4\rho = \text{πολλαπλάσιο του } 4.$$

Επομένως οι περιπτώσεις που οδηγούν σε θετικές ακέραιες λύσεις για τα  $w$  και  $\rho$  είναι μόνον οι εξής:

- $\begin{cases} w+2\rho=16 \\ w-2\rho=4 \end{cases} \Leftrightarrow (w,\rho)=(10,3)$ . Τότε η εξίσωση (6) γίνεται:  
 $y^2+8y-9=0 \Leftrightarrow y=-9$  ή  $y=1$ , οπότε από την αρχική εξίσωση προκύπτουν τα ζεύγη  $(x,y)=(12,-9)$  και  $(x,y)=(-2,1)$ .
- $\begin{cases} w+2\rho=8 \\ w-2\rho=8 \end{cases} \Leftrightarrow (w,\rho)=(8,0)$ . Τότε η εξίσωση (6) γίνεται:  
 $y^2+8y=0 \Leftrightarrow y=0$  ή  $y=-8$ , οπότε από την αρχική εξίσωση προκύπτουν τα ζεύγη  $(x,y)=(0,0)$  και  $(x,y)=(10,-8)$ .

Μπορούμε ακόμη να θεωρήσουμε την εξίσωση ως τριώνυμο μεταβλητής  $y$  και να εργαστούμε ανάλογα, όπως στη παραπάνω περίπτωση. Τότε καταλήγουμε στην αναγκαία συνθήκη να είναι τέλειο η διακρίνουσα  $\Delta = x^2 - 10x + 24 = (x-5)^2 - 1$ , δηλαδή  $(x-5)^2 - 1 = \omega^2 \Leftrightarrow (x-5)^2 - \omega^2 = 1 \Leftrightarrow (x-5-\omega)(x-5+\omega) = 1$ , από την οποία προκύπτουν τελικά οι ακέραιες λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνονται τα σύνολα  $A_1, A_2, \dots, A_{160}$  τέτοια ώστε  $|A_i| = i, i = 1, 2, \dots, 160$ . Με τα στοιχεία των συνόλων αυτών κατασκευάζουμε καινούρια σύνολα  $M_1, M_2, \dots, M_n$  με την ακόλουθη διαδικασία: Στο πρώτο βήμα επιλέγουμε κάποια από τα σύνολα  $A_1, A_2, \dots, A_{160}$  και αφαιρούμε από καθένα από αυτά τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Όλα τα στοιχεία που αφαιρούμε αποτελούν τα στοιχεία του συνόλου  $M_1$ . Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στα σύνολα που έχουν προκύψει μετά την εφαρμογή του πρώτου βήματος και έτσι ορίζουμε το σύνολο  $M_2$ . Συνεχίζουμε ομοίως μέχρι που να εξαντληθούν όλα τα στοιχεία των συνόλων  $A_1, A_2, \dots, A_{160}$  ορίζοντας έτσι τα σύνολα  $M_3, \dots, M_n$ . Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του αριθμού  $n$ .

#### Λύση

Υποθέτουμε ότι κατά το πρώτο βήμα αφαιρούμε από όλα τα επιλεγμένα σύνολα  $k_1$  στοιχεία, κατά το δεύτερο βήμα αφαιρούμε  $k_2$  στοιχεία και ομοίως κατά το  $n$ -στό βήμα αφαιρούμε  $k_n$  στοιχεία. Όταν εξαντληθούν τα στοιχεία όλων των συνόλων  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , τότε θα πρέπει το κάθε  $i = |A_i|, i = 1, 2, \dots, 160$ , να είναι άθροισμα κάποιων όρων από τους  $k_1, k_2, \dots, k_n$ . Όμως τα δυνατά αθροίσματα που δημιουργούνται από όρους που ανήκουν στο σύνολο  $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  είναι  $2^n$ , αφού για τη δημιουργία τέτοιων αθροισμάτων για κάθε όρο υπάρχουν δύο επιλογές, δηλαδή μπορούμε να συμπεριλάβουμε τον όρο στο άθροισμα ή όχι. Επομένως πρέπει να ισχύει ότι  $2^n \geq 160$ , οπότε πρέπει  $n \geq 8$  και η ελάχιστη πιθανή τιμή του  $n$  είναι το 8.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι για  $n = 8$  μπορούμε να επιτύχουμε την εξάντληση των στοιχείων των δεδομένων συνόλων με την προβλεπόμενη διαδικασία, οπότε η ελάχιστη δυνατή τιμή του  $n$  θα είναι 8.

Στο πρώτο βήμα θεωρούμε τα σύνολα  $A_{81}, \dots, A_{160}$  και αφαιρούμε από το καθένα από αυτά 80 στοιχεία. Έτσι το σύνολο  $M_1$  θα έχει  $80 \cdot 80 = 6400$  στοιχεία.

Συμβολίζουμε τα σύνολα που απομένουν μετά την αφαίρεση των 80 στοιχείων ως  $A_{81}^1, \dots, A_{160}^1$ . Τότε τα σύνολα  $A_i$  και  $A_{80+i}^1$ ,  $i = 1, 2, \dots, 80$  έχουν από  $i$  στοιχεία. Στο δεύτερο βήμα θεωρούμε τα σύνολα  $A_{41}, \dots, A_{80}$ ,  $A_{121}^1, \dots, A_{160}^1$  και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 40 στοιχεία. Έτσι το σύνολο  $M_2$  θα έχει  $80 \cdot 40 = 3200$  στοιχεία.

Συμβολίζουμε τα σύνολα που απομένουν μετά την αφαίρεση των 40 στοιχείων ως  $A_{41}^1, \dots, A_{80}^1$  και  $A_{121}^2, \dots, A_{160}^2$ . Τότε τα σύνολα  $A_i$ ,  $A_{40+i}^1$ ,  $A_{80+i}^1$  και  $A_{120+i}^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, 40$  έχουν το καθένα από  $i$  στοιχεία. Στο τρίτο βήμα θεωρούμε τα σύνολα  $A_{21}, \dots, A_{40}$ ,  $A_{60+i}^1, \dots, A_{100+i}^1$ ,  $A_{140+i}^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, 20$  αφαιρούμε από καθένα από αυτά 20 στοιχεία. Έτσι το σύνολο  $M_3$  θα έχει  $80 \cdot 20 = 1600$  στοιχεία.

Συνεχίζουμε ομοίως με ανάλογους συμβολισμούς, θεωρώντας στο τέταρτο βήμα τα σύνολα  $A_{10+i}$ ,  $A_{30+i}^1$ ,  $A_{50+i}^2$ ,  $A_{70+i}^2$ ,  $A_{90+i}^2$ ,  $A_{110+i}^2$ ,  $A_{130+i}^3$ ,  $A_{150+i}^3$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ , και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 10 στοιχεία. Έτσι το σύνολο  $M_4$  θα έχει  $80 \cdot 10 = 800$  στοιχεία. Τα σύνολα που απομένουν έχουν το καθένα το πολύ 10 στοιχεία. Στο πέμπτο βήμα επιλέγουμε τα μισά από αυτά, δηλαδή τα  $A_{5+i(\text{mod}10)}^\ell$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  με τον κατάλληλο εκθέτη  $\ell = 1, 2, 3, 4$  κάθε φορά και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 5 στοιχεία, οπότε το σύνολο  $M_5$  θα έχει  $80 \cdot 5 = 400$  στοιχεία. Έτσι έχουν απομείνει 32 ομάδες συνόλων που έχουν από ένα μέχρι πέντε στοιχεία. Στο έκτο βήμα επιλέγουμε από αυτά τα  $A_{2+i(\text{mod}5)}^\ell$ ,  $i = 1, 2, 3$ , συνολικά 96 σύνολα, με τον κατάλληλο εκθέτη  $\ell = 1, 2, \dots, 5$  κάθε φορά και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 3 στοιχεία, οπότε το σύνολο  $M_6$  θα έχει  $96 \cdot 3 = 288$  στοιχεία. Τότε τα 32 σύνολα  $A_{3(\text{mod}5)}^\ell$  γίνονται κενά, τα σύνολα  $A_1$ ,  $A_{1(\text{mod}3)}^\ell$  έχουν από ένα στοιχείο, ενώ τα σύνολα  $A_2$ ,  $A_{2(\text{mod}3)}^\ell$ , με τον κατάλληλο δείκτη  $\ell = 1, 2, \dots, 6$  έχουν από δύο στοιχεία. Στο έβδομο βήμα θεωρούμε τα σύνολα  $A_2$ ,  $A_{2(\text{mod}3)}^\ell$ , με τον κατάλληλο δείκτη  $\ell = 1, 2, \dots, 6$  και τους αφαιρούμε από δύο στοιχεία, οπότε γίνονται κενά, ενώ στο όγδοο βήμα θεωρούμε τα σύνολα  $A_1$ ,  $A_{1(\text{mod}3)}^\ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, 6$  και τους αφαιρούμε από ένα στοιχείο, οπότε γίνονται κενά.

Έτσι το σύνολο  $M_7$  θα έχει 128 στοιχεία, ενώ το σύνολο  $M_8$  θα έχει 64 στοιχεία.

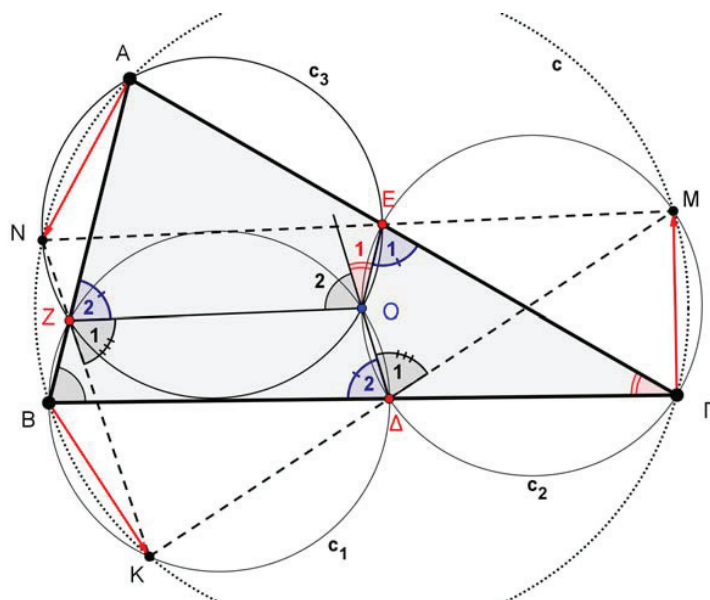
**Παρατήρηση.** Η προηγούμενη απόδειξη για ότι ο αριθμός των βημάτων μπορεί να είναι 8, δεν είναι μοναδική. Θα μπορούσαμε στο πρώτο βήμα να πάρουμε τα 81 σύνολα  $A_{80}, A_{81}, \dots, A_{160}$  και να τους αφαιρέσουμε από 80 στοιχεία με ανάλογη συνέχεια στα επόμενα βήματα. Τότε θα αφαιρούσαμε στο πρώτο βήμα  $81 \cdot 80 = 6480$  στοιχεία που είναι και το μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων που μπορεί να αφαιρεθούν στο πρώτο βήμα.

#### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $c(O, R)$  (με κέντρο το σημείο  $O$  και ακτίνα  $R$ ) και έστω  $\Delta$  τυχόν σημείο της πλευράς  $B\Gamma$  (διαφορετικό από το μέσο της  $B\Gamma$ ). Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $BO\Delta$  (έστω  $c_1$ ) τέμνει τον κύκλο  $c(O, R)$  στο σημείο  $K$  και την  $AB$  στο σημείο  $Z$ . Ο περιγεγραμμένος κύκλος του

τριγώνου  $\Gamma O \Delta$ , έστω  $c_2$ , τέμνει τον κύκλο  $c(O, R)$  στο σημείο  $M$  και την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Τέλος, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $AEZ$  έστω  $c_3$ , τέμνει τον κύκλο  $c(O, R)$  στο σημείο  $N$ . Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $KMN$  είναι ίσα.

### Λύση



Σχήμα 1

Θα αποδείξουμε ότι ο κύκλος  $c_3$  περνάει από το κέντρο  $O$  του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο  $c_2$  τετράπλευρο  $O\Delta\Gamma E$  έχουμε:  $\hat{O}_1 = \hat{\Gamma}$ .

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο  $c_1$  τετράπλευρο  $O\Delta BZ$  έχουμε:  $\hat{O}_2 = \hat{B}$ .

Από τη πρόσθεση κατά μέλη των δύο προηγούμενων ισοτήτων γωνιών λαμβάνουμε:

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{E}\hat{O}\hat{Z} = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A},$$

οπότε το τετράπλευρο  $AE OZ$  είναι εγγράψιμο (άθροισμα απέναντι γωνιών  $180^\circ$ ).

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι οι κύκλοι  $c_1, c_2, c_3$  είναι ίσοι μεταξύ τους.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο  $c_1$  τετράπλευρο  $O\Delta BZ$  έχουμε:  $\hat{\Delta}_2 = \hat{Z}_2$ .

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο  $c_2$  τετράπλευρο  $O\Delta\Gamma E$  έχουμε:  $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$ .

Επομένως έχουμε ότι:  $\hat{\Delta}_2 = \hat{Z}_2 = \hat{E}_1$ . Οι τρεις αυτές ίσες γωνίες βαίνουν στις ίσες χορδές  $OB, O\Gamma$  και  $OA$  των κύκλων  $c_1, c_2$  και  $c_3$  αντίστοιχα. Άρα οι κύκλοι  $c_1, c_2, c_3$  έχουν ίσες ακτίνες, οπότε είναι ίσοι μεταξύ τους.

Στους ίσους κύκλους  $c_1$  και  $c_2$ , οι γωνίες  $\hat{Z}_1$  και  $\hat{\Delta}_1$  βαίνουν στις ίσες χορδές  $OK$  και  $OM$  ( $OK = OM = R$ ), οπότε θα είναι:  $\hat{Z}_1 = \hat{\Delta}_1$ .

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι τα σημεία  $K, \Delta, M$  είναι συνευθειακά. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι τα σημεία  $M, E, N$  και τα σημεία  $N, Z, K$  είναι επίσης συνευθειακά.

Από τις ισότητες των γωνιών  $\widehat{BK} = \widehat{\Gamma M}$  και  $\widehat{\Gamma M} = \widehat{A\hat{E}N}$  (που είναι κατά κορυφή) προκύπτει η ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων  $AN = BK = \Gamma M$  (τα οποία είναι χορδές του κύκλου  $c(O, R)$ ).

Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $KMN$  έχουν κοινό περίκεντρο  $O$  και το  $KMN$  είναι η εικόνα του  $AB\Gamma$  στη στροφή με κέντρο το σημείο  $O$  και γωνία  $\widehat{A\hat{O}N} = \widehat{B\hat{O}K} = \widehat{\Gamma\hat{O}M} = \hat{\omega}$ . Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους.

**Παρατήρηση.** Το περίκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ , ταυτίζεται με το σημείο Μίχελ που αντιστοιχεί στα σημεία  $\Delta, E, Z$  των πλευρών του τριγώνου. Έτσι μπορεί να προκύψει άμεσα ότι το τετράπλευρο  $AE\hat{O}Z$  είναι εγγράψιμο.