ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ ΕΜΕ
28η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011
Ενδεικτικές Λύσεις θεμάτων μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να λύσετε στους ακέραιους την εξίσωση

$$x^3y^2(2y-x)=x^2y^4-36.$$

Λύση

Μετά τις πράξεις διαπιστώνουμε ότι η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2y^2(x-y)^2-6^2=0,\ x,y\in\mathbb{Z},$$

$$\Leftrightarrow\left[xy(x-y)-6\right]\cdot\left[xy(x-y)+6\right]=0,\ x,y\in\mathbb{Z},$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y)=6,\ x,y\in\mathbb{Z},\qquad \text{ή}\quad xy(x-y)=-6,\ x,y\in\mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y)=6,\ x,y\in\mathbb{Z},\quad (1)\quad \text{ή}\quad xy(y-x)=6,\ x,y\in\mathbb{Z}.\qquad (2)$$

Από τη μορφή των (1) και (2) προκύπτει ότι, αν (x_0,y_0) είναι λύση της (1), τότε το ζευγάρι (y_0,x_0) είναι λύση της (2) και αντιστρόφως. Επομένως, αρκεί να λύσουμε μόνον την εξίσωση (1). Επειδή $x,y\in\mathbb{Z}$, η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με :

$$\{xy=6,x-y=1\}(\Sigma_1)\text{ ή }\{xy=-6,x-y=-1\}(\Sigma_2)$$

$$\text{ή}\{xy=3,x-y=2\}(\Sigma_3)\text{ ή }\{xy=-3,x-y=-2\}(\Sigma_4)$$

$$\text{ή}\{xy=1,x-y=6\}(\Sigma_5)\text{ ή }\{xy=-1,x-y=-6\}(\Sigma_6)$$

$$\text{ή}\{xy=2,x-y=3\}(\Sigma_7)\text{ ή }\{xy=-2,x-y=-3\}(\Sigma_8).$$

Από τα 8 συστήματα μόνον τα (Σ_1), (Σ_3), (Σ_8) δίνουν τις ακέραιες λύσεις:

$$(x,y)=(3,2),(x,y)=(-2,-3),\ (x,y)=(3,1),$$

$$(x,y)=(-1,-3),\ (x,y)=(-2,1)\text{ και }(x,y)=(-1,2).$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, η εξίσωση (2) έχει στους ακέραιους τις λύσεις

$$(x,y)=(2,3),(x,y)=(-3,-2),(x,y)=(1,3),$$

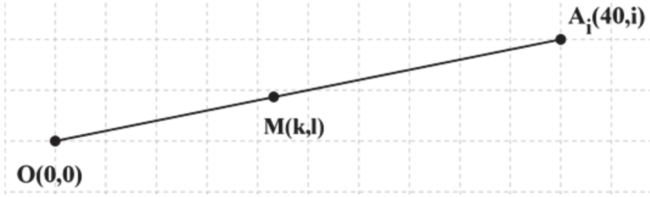
$$(x,y)=(-3,-1),(x,y)=(1,-2)\text{ και }(x,y)=(2,-1).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A_1(40,1)$, $A_2(40,2)$, …, $A_{40}(40,40)$ καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα $OA_1,OA_2,\ldots,OA_{40}$. Ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου Oxy θα το ονομάζουμε "*καλό*", όταν οι συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί και βρίσκεται στο εσωτερικό (δηλαδή δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα άκρα του) ενός ευθυγράμμου τμήματος OA_i $i=1,2,3,\ldots,40$. Επίσης, ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα $OA_1,OA_2,\ldots,OA_{40}$, θα το ονομάζουμε "*καλό*", όταν περιέχει ένα τουλάχιστον "*καλό*" σημείο. Να υπολογισθεί το πλήθος των "*καλών*" σημείων και το πλήθος των "*καλών*" ευθυγράμμων τμημάτων.

Λύση.

Στη λύση που ακολουθεί, θα συμβολίζουμε με $\text{ΜΚΔ}(k,l)$, το μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακεραίων αριθμών k,l.



Σχήμα 1

Ένα σημείο $\text{Μ}(k,l)$ θα ανήκει στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ_i, αν και μόνο αν, τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΟΜ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΟΑ}_i}$ έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης (με k,l ακέραιους αριθμούς και $0<k\le 40$), δηλαδή πρέπει να ισχύει $\frac{i}{40}=\frac{l}{k}$ (με k,l ακέραιους αριθμούς και $0<k\le 40$).

Για να είναι τώρα το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ_i “καλό”, θα πρέπει το κλάσμα $\frac{i}{40}$ να μην είναι ανάγωγο (ώστε να δημιουργούνται ισοδύναμα με το $\frac{i}{40}$ κλάσματα με ακέραιους όρους που θα δημιουργούν το συντελεστή διεύθυνσης $\frac{l}{k}$ και τις αντίστοιχες συντεταγμένες του “καλού” σημείου $\text{Μ}(k,l)$).

Επομένως, για να υπάρχει “καλό” σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ_i (ώστε να χαρακτηριστεί και το ίδιο ως “καλό”) θα πρέπει $\text{ΜΚΔ}(40,i)>1$. Αν τώρα $\text{ΜΚΔ}(40,i)>1$, τότε θα υπάρχουν $\text{ΜΚΔ}(40,i)-1$ “καλά” σημεία στο ευθύγραμμο τμήμα OA_i. Στο σημείο $\text{Α}_2(40,2)$ αντιστοιχεί το “καλό” ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ_2, στο οποίο ανήκει το “καλό” σημείο $(20,1)$. Στο σημείο $\text{Α}_4(40,4)$ αντιστοιχεί το “καλό” ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ_4, στο οποίο ανήκουν τα “καλά” σημεία $(10,1)$, $(20,2)$, $(30,3)$. Με αυτό τον τρόπο δημιουργούμε τον πίνακα:

A2(40,2)	ΜΚΔ(40,2)=2	1	A40(40,40)	ΜΚΔ(40,40)=40	39
A4(40,4)	ΜΚΔ(40,4)=4	3	A38(40,38)	ΜΚΔ(40,38)=2	1
A5(40,5)	ΜΚΔ(40,5)=5	4	A36(40,36)	ΜΚΔ(40,36)=4	3
A6(40,6)	ΜΚΔ(40,6)=2	1	A35(40,35)	ΜΚΔ(40,35)=5	4
A8(40,8)	ΜΚΔ(40,8)=8	7	A34(40,34)	ΜΚΔ(40,34)=2	1
A10(40,10)	ΜΚΔ(40,10)=10	9	A32(40,32)	ΜΚΔ(40,32)=8	7
A12(40,12)	ΜΚΔ(40,12)=4	3	A30(40,30)	ΜΚΔ(40,30)=10	9
A14(40,14)	ΜΚΔ(40,14)=2	1	A28(40,28)	ΜΚΔ(40,28)=4	3
A15(40,15)	ΜΚΔ(40,15)=5	4	A26(40,26)	ΜΚΔ(40,26)=2	1
A16(40,16)	ΜΚΔ(40,16)=8	7	A25(40,25)	ΜΚΔ(40,25)=5	4

A18(40,18)	ΜΚΔ(40,18)=2	1	A24(40,24)	ΜΚΔ(40,24)=8	7
A20(40,20)	ΜΚΔ(40,20)=20	19	A22(40,22)	ΜΚΔ(40,22)=2	1
		60			**80**

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των "καλών" τμημάτων είναι 24 και το πλήθος των καλών σημείων 140.

Παρατηρήσεις

1. Ο παραπάνω πίνακας έχει ευρεία ανάπτυξη για διδακτικούς λόγους.

2. Ο υπολογισμός του πίνακα διευκολύνεται σημαντικά με τη χρησιμοποίηση των ιδιοτήτων του μέγιστου κοινού διαιρέτη:

$$\text{ΜΚΔ}\,(k,l)=\text{ΜΚΔ}\,(l,k)=\text{ΜΚΔ}\,(l-k,k)=\text{ΜΚΔ}\,(|l-k|,|k|).$$

3. Το πλήθος των "καλών" ευθυγράμμων τμημάτων μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της συνάρτησης ϕ του Euler. Είναι γνωστό ότι $n-\phi(n)$ παριστά το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με τον n και δεν είναι πρώτοι προς αυτόν. Επειδή όμως $40=5\cdot 2^3$, έχουμε:

$$\phi(40)=40\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=40\frac{1}{2}\frac{4}{5}=16.$$

Άρα το πλήθος των "καλών" ευθυγράμμων τμημάτων είναι $40-\phi(40)=24$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a,b,c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 6, να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή της παράστασης:

$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}.$$

.

Λύση.

Χρησιμοποιούμε την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου ως εξής:

$$\sqrt[3]{a^2+2bc}=\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\sqrt[3]{\left(a^2+2bc\right)\cdot 12\cdot 12}\le\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\cdot\frac{a^2+2bc+12+12}{3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left(a^2+2bc+24\right),$$

$$\sqrt[3]{b^2+2ca}=\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\sqrt[3]{\left(b^2+2ca\right)\cdot 12\cdot 12}\le\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\cdot\frac{b^2+2ca+12+12}{3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left(b^2+2ca+24\right),$$

$$\sqrt[3]{c^2+2ab}=\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\sqrt[3]{\left(c^2+2ab\right)\cdot 12\cdot 12}\le\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\cdot\frac{c^2+2ab+12+12}{3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left(c^2+2ab+24\right),$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}\le\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+72\right)$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left[\left(a+b+c\right)^2+72\right]=\frac{36}{\sqrt[3]{12^2}}=\frac{18}{\sqrt[3]{18}}=3\sqrt[3]{12}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν

$$a^2+2bc=12,\ b^2+2ca=12,\ c^2+2ab=12$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b-2c)=0,(b-c)(b+c-2a)=0,c^2+2ab=12$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(6-3c)=0,(b-c)(6-3a)=0,c^2+2ab=12$$
$$\Leftrightarrow a=b=c=2.$$

Επομένως η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι $3\sqrt[3]{12}$ και λαμβάνεται όταν είναι $a=b=c=2$.

Παρατήρηση

1. *Η επιλογή του αριθμού 12 ως δεύτερου και τρίτου όρου για την εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου οφείλεται στο ότι μόνον για αυτόν είναι δυνατόν να αληθεύει η ισότητα και στις τρεις επιμέρους ανισότητες. Αυτό είναι αναγκαίο για είναι δυνατόν η παράσταση να πάρει την τιμή που εμφανίζεται ως ένα πάνω φράγμα της. Για παράδειγμα, αν είχαμε χρησιμοποιήσει τις ανισότητες*

$$\sqrt[3]{a^2+2bc}=\sqrt[3]{\left(a^2+2bc\right)\cdot 1\cdot 1}\le \frac{a^2+2bc+2}{3},$$
$$\sqrt[3]{b^2+2ca}=\sqrt[3]{\left(b^2+2ca\right)\cdot 1\cdot 1}\le \frac{b^2+2ca+2}{3},$$
$$\sqrt[3]{c^2+2ab}=\sqrt[3]{\left(c^2+2ab\right)\cdot 1\cdot 1}\le \frac{c^2+2ab+2}{3},$$

τότε με πρόσθεση κατά μέλη θα βρίσκαμε

$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}\le \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+6}{3}$$
$$=\frac{(a+b+c)^2+6}{3}=\frac{42}{3}=14.$$

Η ισότητα στην τελευταία σχέση δεν μπορεί να αληθεύει, όπως προκύπτει από το σύστημα

$$a^2+2bc=1,\ b^2+2ca=1,\ c^2+2ab=1$$
$$\Rightarrow (a+b+c)^2=3, \text{ άτοπο.}$$

2. *Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό*

$$x=\sqrt[3]{a^2+2bc},\ y=\sqrt[3]{b^2+2ca},\ z=\sqrt[3]{c^2+2ab},$$

μέσω του οποίου η συνάρτηση γίνεται $S(x,y,z)=x+y+z$, *της οποίας ζητάμε τη μέγιστη τιμή υπό τη συνθήκη* $x^3+y^3+z^3=(a+b+c)^2=36$. *Στη συνέχεια θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει* ***τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange****, χωρίς σοβαρό πρόβλημα στις πράξεις. Επίσης θα μπορούσε κάποιος να εργαστεί χρησιμοποιώντας και άλλες κλασικές ανισότητες, όπως η ανισότητα του Holder ή την ανισότητα των δυνάμεων.*

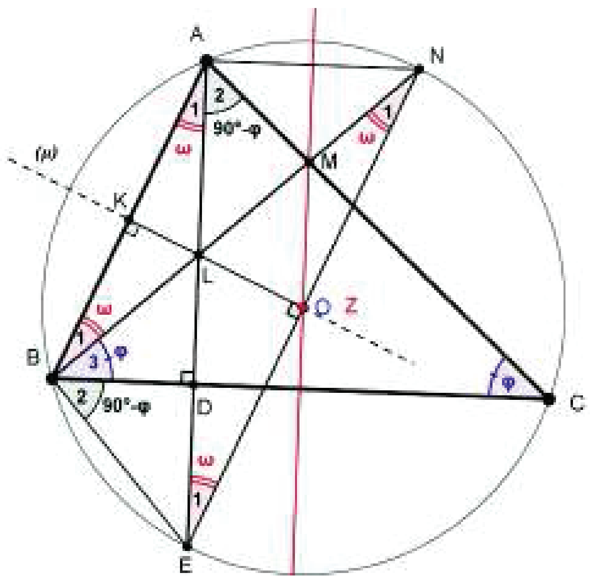
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB<AC$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Η προέκταση του ύψους AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο E και η μεσοκάθετη (μ) της πλευράς AB τέμνει την AD στο σημείο L. Η BL τέμνει την AC στο σημείο M και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο N. Τέλος η EN τέμνει τη μεσοκάθετη (μ) στο σημείο $\boldsymbol{Z}$.

Να αποδείξετε ότι: $MZ \perp BC \Leftrightarrow \left(CA = CB \quad ή \quad Z \equiv O\right)$, δηλαδή ότι "η MZ είναι κάθετη στην BC, αν, και μόνο αν, το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA = CB$ ή το σημείο Z ταυτίζεται με το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O, R)$".

Λύση

Επειδή το σημείο L ανήκει στη μεσοκάθετη του AB, θα ισχύει: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\omega}$ και κατά συνέπεια $AN = BE$. Άρα το τετράπλευρο $ABEN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB // EN$, οπότε η ευθεία (μ) είναι μεσοκάθετος της EN και $\hat{E}_1 = \hat{N}_1 = \hat{\omega}$.



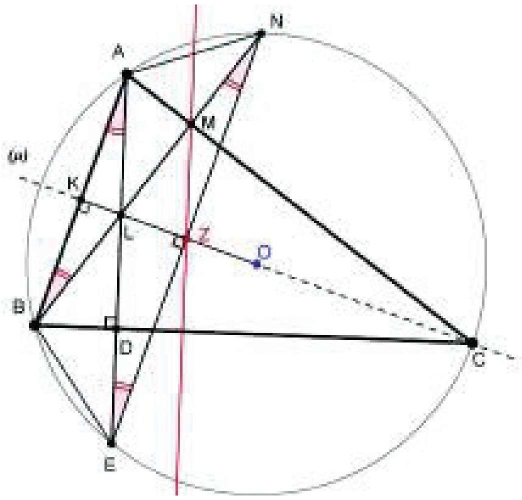
Σχήμα 2

Έστω ότι το σημείο Z ταυτίζεται με το σημείο O (Σχήμα 2).

Τότε η EN γίνεται διάμετρος του κύκλου, οπότε $E\hat{B}N = \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^o$. Αν $\hat{C} = \hat{\varphi}$ τότε από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABEC$ έχουμε: $\hat{B}_2 = \hat{A}_2 = 90^o - \hat{\varphi}$.

Από τη τελευταία ισότητα (σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^o$) έχουμε: $\hat{B}_3 = \hat{\varphi}$. Άρα το M ανήκει στη μεσοκάθετη του BC ($MB = MC$). Το σημείο O ανήκει επίσης στη μεσοκάθετη του BC και επειδή ταυτίζεται με το σημείο Z, συμπεραίνουμε ότι η MZ είναι μεσοκάθετος της BC.

Έστω ότι το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές **($CA = CB$).** Τότε η μεσοκάθετος (μ) της AB είναι ύψος του τριγώνου ABC (Σχήμα 2), δηλαδή το L είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC και κατά συνέπεια ***το σημείο M είναι το μέσο του τμήματος*** LN (η BM είναι ύψος και το σημείο N είναι το συμμετρικό του ορθοκέντρου L ως προς την AC).



Σχήμα 3

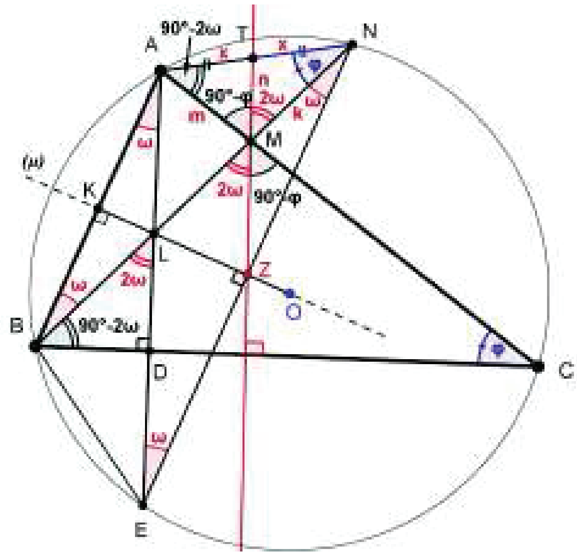
Το σημείο Z ***είναι το μέσο του τμήματος*** EN **(**διότι η ευθεία (μ) είναι μεσοκάθετος της EN).

Άρα η MZ είναι παράλληλη με την AD .

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η MZ ***είναι κάθετη στην*** BC ***και θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο*** ABC ***είναι ισοσκελές (*** $CA = CB$ ***) ή το σημείο*** Z ***ταυτίζεται με το κέντρο*** O ***του περιγεγραμμένου κύκλου (Σχήμα 4).***

Έστω λοιπόν ότι η MZ είναι κάθετη στην BC . Τότε η MZ θα είναι παράλληλη με την AE ($MZ \,//\, AE$).

Αν T είναι η τομή της MZ με την AN τότε το T είναι το μέσο AN (διότι Z είναι το μέσο της NE και $MZ \,//\, AE$). Άρα τα τρίγωνα MTA και MTN έχουν το ίδιο εμβαδό ($E_1 = (MTA) = (MTN) = E_2$).



Σχήμα 4

Από την παραλληλία $MZ \,//\, AE$, προκύπτει η “μεταφορά” γωνιών στο τρίγωνο AMN στο οποίο η MT είναι διάμεσος. Σημειώνουμε ότι:

$B\hat{L}D = 2\hat{\omega}$ (διότι η $B\hat{L}D$ είναι εξωτερική γωνία του ισοσκελούς τριγώνου LEN).
$L\hat{M}Z = 2\hat{\omega}$ (διότι $LD // MZ$ οπότε $B\hat{L}D = L\hat{M}Z = 2\hat{\omega}$).

Χρησιμοποιώντας τώρα το γνωστό τύπο $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A$ για το εμβαδό τριγώνου, έχουμε:

$$E_1 = \frac{1}{2}mn\,\eta\mu(90-\varphi) = \frac{1}{2}mx\,\eta\mu(90-2\omega)$$

$$E_2 = \frac{1}{2}kn\,\eta\mu 2\omega = \frac{1}{2}kx\,\eta\mu\varphi$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}{\eta\mu\,2\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu\,2\omega}{\eta\mu\,\varphi} \Leftrightarrow \eta\mu\,2\varphi = \eta\mu\,4\omega .$$

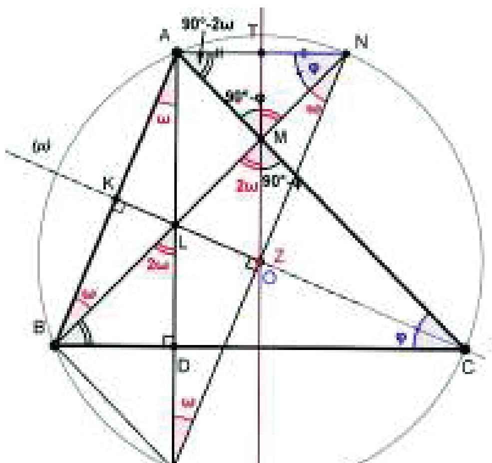
Από τη τελευταία ισότητα ημιτόνων (και με δεδομένο ότι οι γωνίες ω,φ είναι γωνίες τριγώνου) καταλήγουμε στις ισότητες:

$$2\varphi = 4\omega \Leftrightarrow \varphi = 2\omega \qquad (A) \quad \text{ή} \quad 2\varphi = \pi - 4\omega \Leftrightarrow \varphi + 2\omega = \frac{\pi}{2} \qquad (B).$$

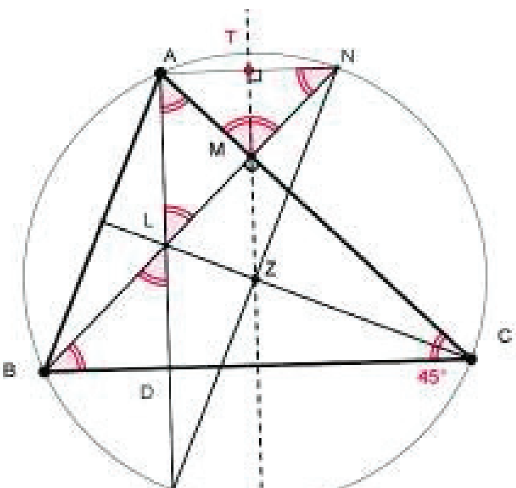
Από την ισότητα (A) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο MTN είναι ισοσκελές ($TM = TN$) και κατά συνέπεια το τρίγωνο AMN είναι ορθογώνιο στο M ($A\hat{M}N = 90^o$). Άρα η BM είναι ύψος του τριγώνου ABC και επομένως το L ορθόκεντρο, δηλαδή το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές ($CA = CB$) διότι η μεσοκάθετος KZ είναι και ύψος.

Από την ισότητα (B) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο MTN είναι ορθογώνιο στο T, δηλαδή η MT είναι μεσοκάθετος της AN. Άρα η MT θα διέρχεται από το O (οπότε $Z \equiv O$).

Παρατήρηση



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Αν το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA = CB$ και $\hat{C} = \hat{\varphi} = 45^o$, τότε τα τρίγωνα TMN, TMA και AMN είναι ορθογώνια και ισοσκελή. Το τετράπλευρο $ABCN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Άρα η TM είναι μεσοκάθετη της BC.

Στη περίπτωση αυτή και το σημείο Z *ταυτίζεται με το σημείο* O, *οπότε η διάζευξη των προτάσεων* $\left(CA = CB \quad ή \quad Z \equiv O\right)$ *είναι εγκλειστική.*