ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
26^{η} Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{9n-1}{n+7}}$$

είναι ρητός.

Λύση

Αρκεί να υπάρχουν $a,b \in \mathbb{N}^*$ με $(a,b)=1$ τέτοιοι ώστε:

$$\frac{9n-1}{n+7} = \frac{a^2}{b^2}. \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$n = \frac{7a^2+b^2}{9b^2-a^2} = \frac{7(a^2-9b^2)+64b^2}{9b^2-a^2} = -7 + \frac{64b^2}{9b^2-a^2} \qquad (2)$$

Επειδή είναι $(a,b)=1$, έπεται ότι $(a^2,b^2)=1$ και $(9b^2-a^2,b^2)=1$, οπότε από τη σχέση (2) προκύπτει ότι ο αριθμός n είναι ακέραιος, αν, και μόνον αν, ο ακέραιος $9b^2-a^2$ είναι διαιρέτης του 64.

Επειδή οι αριθμοί a,b και n είναι θετικοί ακέραιοι, προκύπτει ότι $9b^2-a^2 \geq 8$, οπότε θα είναι:

$$9b^2-a^2 = (3b+a)(3b-a) \in \{8,16,32,64\}. \qquad (3)$$

Επειδή οι παράγοντες $3b+a$, $3b-a$ έχουν άθροισμα πολλαπλάσιο του 6 και διαφορά πολλαπλάσιο του 2 και είναι $3b+a > 3b-a$, από τη σχέση (3) οι μόνες δυνατές περιπτώσεις που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$(3b+a,3b-a)=(4,2) \text{ ή } (3b+a,3b-a)=(8,4) \text{ ή } (3b+a,3b-a)=(16,2)$$
$$\Leftrightarrow (a,b)=(1,1) \text{ ή } (a,b)=(2,2) \text{ ή } (a,b)=(7,3).$$

Το ζευγάρι $(a,b)=(2,2)$ απορρίπτεται, γιατί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a,b είναι 2, οπότε προκύπτουν τελικά οι τιμές $n=1$ ή $n=11$.

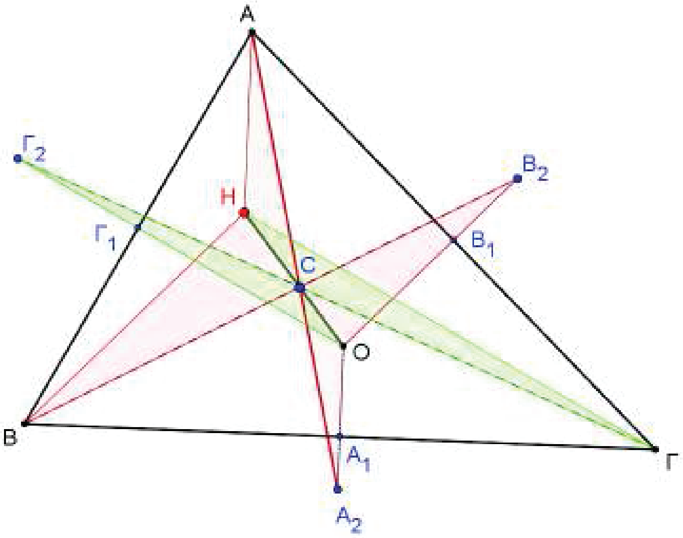
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με περίκεντρο Ο και $\mathrm{A}_1,\mathrm{B}_1,\Gamma_1$ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}_2,\mathrm{B}_2,\Gamma_2$ έτσι ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}_2}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}_1}$ και $\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma_2}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma_1}$ με $\lambda>0$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $\mathrm{AA}_2,\mathrm{BB}_2,\Gamma\Gamma_2$ συντρέχουν.

Λύση

Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$. Τότε θα ισχύει $\overrightarrow{AH} = 2\cdot\overrightarrow{OA_1}$. Δεδομένου όμως ότι $\overrightarrow{OA_2} = \lambda\cdot\overrightarrow{OA_1}$, καταλήγουμε στη σχέση: $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{\lambda}\cdot\overrightarrow{OA_2}$.

Αν τώρα C είναι το σημείο τομής των AA_2 και OH (από την ομοιότητα των τριγώνων CHA και COA_2), έχουμε: $\overrightarrow{HC} = \frac{2}{\lambda}\cdot\overrightarrow{CO}$. Δηλαδή η AA_2 περνάει από το σημείο C που χωρίζει το OH σε λόγο $\frac{2}{\lambda}$.



Ομοίως, θα ισχύει $\overrightarrow{BH} = 2\cdot\overrightarrow{OB_1}$. Δεδομένου όμως ότι $\overrightarrow{OB_2} = \lambda\cdot\overrightarrow{OB_1}$, καταλήγουμε

$$\overrightarrow{BH} = \frac{2}{\lambda}\cdot\overrightarrow{OB_2}.$$

Αν τώρα C' είναι το σημείο τομής των BB_2 και OH (από την ομοιότητα των τριγώνων $C'HA$ και $C'OB_2$), έχουμε: $\overrightarrow{HC'} = \frac{2}{\lambda}\cdot\overrightarrow{C'O}$. Δηλαδή η BB_2 περνάει από το σημείο C' που χωρίζει το OH σε λόγο $\frac{2}{\lambda}$.

Αν τώρα C'' είναι το σημείο τομής των BB_2 και OH, τότε με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι η $\Gamma\Gamma_2$ περνάει από το σημείο C'' που χωρίζει το OH σε λόγο $\frac{2}{\lambda}$.

Τα σημεία όμως C, C', C'' ταυτίζονται. Άρα οι ευθείες $AA_2, BB_2, \Gamma\Gamma_2$ συντρέχουν.

Παρατηρήσεις

(1) Αν $\lambda = 1$ τότε το σημείο C ταυτίζεται με το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

(2) Αν $\lambda = 2$ τότε το σημείο C ταυτίζεται με το κέντρο του κύκλου του Euler του τριγώνου $AB\Gamma$. Στη περίπτωση αυτή τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A_2B_2\Gamma_2$ είναι ίσα και έχουν κοινό κύκλο του Euler.

(3) Σε κάθε περίπτωση τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A_2B_2\Gamma_2$ είναι όμοια με τις πλευρές τους παράλληλες. Το ένα τρίγωνο είναι "εικόνα" του άλλου μέσα από ομοιοθεσίες, οπότε μπορεί να προκύψει λύση και μέσω ομοιοθεσιών.

(4) Λύσεις του προβλήματος μπορούν να δοθούν με χρήση Αλυτικής Γεωμετρίας ή μιγαδικών αριθμών.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν άθροισμα 2, να αποδείξετε ότι:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \le 1.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε στην πρώτη φάση τη γνωστή ανισότητα $2\alpha\beta \le \alpha^2 + \beta^2$, η οποία ισχύει για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει για $\alpha = \beta$. Έτσι έχουμε

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz = \frac{1}{2}\left(2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 + 2xyz\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2xy \cdot xy + 2yz \cdot yz + 2zx \cdot zx + 2xyz\right)$$

$$\le \frac{1}{2}\left[xy\left(x^2 + y^2\right) + yz\left(y^2 + z^2\right) + yz\left(y^2 + z^2\right) + 2xyz\right] \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(xy + yz + zx\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - xyz^2 - yzx^2 - zxy^2 + 2xyz\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(xy + yz + zx\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - xyz\left(x + y + z - 2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(xy + yz + zx\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right], \qquad (\text{αφού } x + y + z = 2).$$

Μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει ότι:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \le \frac{1}{2}\left[\left(xy + yz + zx\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right], \qquad (2)$$

ενώ η ισότητα ισχύει, όπως προκύπτει από την (1), όταν :

$$x = y = z \text{ ή } x = y, z = 0 \text{ ή } y = z, x = 0 \text{ ή } z = x, y = 0,$$

οπότε, αφού είναι $x + y + z = 2$, η ισότητα αληθεύει όταν:

$$\left(x, y, z\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ ή } \left(1,1,0\right) \text{ ή } \left(1,0,1\right) \text{ ή } \left(0,1,1\right). \qquad (3)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή ανισότητα $\alpha\beta \le \left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, θεωρώντας $\alpha = 2xy + 2yz + 2zx$, $\beta = x^2 + y^2 + z^2$. Έτσι έχουμε

$$\frac{1}{2}\left[\left(xy + yz + zx\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right] = \frac{1}{4}\left[\left(2xy + 2yz + 2zx\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right]$$

$$\le \frac{1}{4}\left(\frac{2xy + 2yz + 2zx + x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(x + y + z\right)^4 = 1. \qquad (4)$$

Από τις (2) και (4) λαμβάνουμε τη ζητούμενη ανισότητα

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \le 1.$$

Η ισότητα στην ανισότητα (4) ισχύει όταν:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow 2xy + 2yz + 2zx = x^2 + y^2 + z^2,$$

η οποία συναληθεύει με τις ισότητες (3) για $\left(x, y, z\right) = \left(1,1,0\right)$ ή $\left(1,0,1\right)$ ή $\left(0,1,1\right)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ των οποίων οι εικόνες $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ είναι διαδοχικά σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $r>0$. Αν w είναι μία λύση της εξίσωσης $z^2+z+1=0$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1w^2+z_3w+z_5=0 \quad \text{(I)},$$
$$z_2w^2+z_4w+z_6=0 \quad \text{(II)}$$

να αποδείξτε ότι:

(α) Το τρίγωνο $A_1A_3A_5$ είναι ισόπλευρο,

(β) $|z_1-z_2|+|z_2-z_3|+|z_3-z_4|+|z_4-z_5|+|z_5-z_6|+|z_6-z_1|==3|z_1-z_4|=3|z_2-z_5|=3|z_3-z_6|$.

Λύση

(α) Εφόσον ο μιγαδικός w είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+z+1=0$, θα ισχύει $w^2+w+1=0$. Πολλαπλασιάζοντας τη τελευταία εξίσωση με w, έχουμε:

$$w^3+w^2+w=0 \Leftrightarrow w^3+\underbrace{w^2+w+1}_{0}=1 \Leftrightarrow w^3=1.$$

Από τη τελευταία εξίσωση συμπεραίνουμε ότι $|w|=1$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (I) $w^2=-w-1$, έχουμε:

$$z_1(-1-w)+z_3w+z_5=0 \Leftrightarrow -z_1-z_1w+z_3w+z_5=0 \Leftrightarrow (z_3-z_1)w=z_1-z_5.$$

Άρα

$$|(z_3-z_1)w|=|z_1-z_5| \Leftrightarrow |z_3-z_1||w|=|z_1-z_5| \Leftrightarrow \boxed{|z_3-z_1|=|z_1-z_5|} \quad \text{(A)}.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (I) $w=-w^2-1$, έχουμε:

$$z_1w^2+z_3(-w^2-1)+z_5=0 \Leftrightarrow z_1w^2-z_3w^2-z_3+z_5=0 \Leftrightarrow (z_1-z_3)w^2=z_5-z_3.$$

Άρα έχουμε

$$|(z_1-z_3)w^2|=|z_5-z_3| \Leftrightarrow |z_1-z_3||w^2|=|z_5-z_3| \Leftrightarrow \boxed{|z_3-z_1|=|z_5-z_3|} \quad \text{(B)}.$$

Από τις σχέσεις (A) και (B) έχουμε τις ισότητες:

$$|z_1-z_3|=|z_3-z_5|=|z_5-z_1|,$$

δηλαδή το τρίγωνο $A_1A_3A_5$ είναι ισόπλευρο.

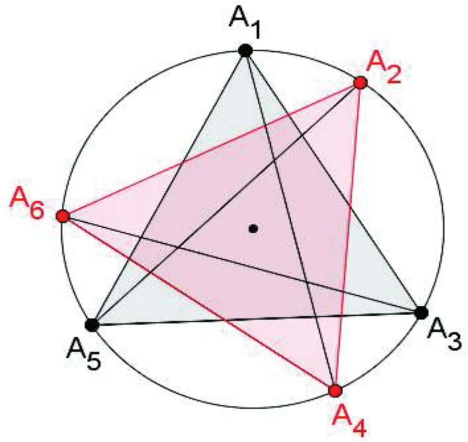
(β) Με όμοιο τρόπο (χρησιμοποιώντας τη σχέση (II)) αποδεικνύουμε ότι και το τρίγωνο $A_2A_4A_6$ είναι ισόπλευρο.

Από γνωστή πρόταση της γεωμετρίας έχουμε ότι $A_1A_2+A_1A_6=A_1A_4$, οπότε χρησιμοποιώντας μέτρα μιγαδικών λαμβάνουμε:

$$|z_1-z_2|+|z_6-z_1|=|z_1-z_4|. \qquad (1)$$

Ομοίως, από την ισότητα $A_3A_2+A_3A_4=A_3A_6$ χρησιμοποιώντας μέτρα μιγαδικών λαμβάνουμε:

$$|z_2-z_3|+|z_3-z_4|=|z_3-z_6|. \qquad (2)$$



Ομοίως , από την ισότητα $A_5A_4 + A_5A_6 = A_5A_2$ χρησιμοποιώντας μέτρα μιγαδικών λαμβάνουμε:

$$|z_4 - z_5| + |z_5 - z_6| = |z_2 - z_5|. \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1), (2) και (3) κατά μέλη και χρησιμοποιώντας τις ισότητες

$$|z_1 - z_4| = |z_3 - z_6| = |z_2 - z_5|$$

λαμβάνουμε:

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| + |z_4 - z_5| + |z_5 - z_6| + |z_6 - z_1| = 3|z_1 - z_4| = 3|z_2 - z_5| = 3|z_3 - z_6|.$$