



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ  
6<sup>η</sup> ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Απρίλιος 2005

ΧΡΟΝΟΣ: 60 ΛΕΠΤΑ

Δοκίμο για Α', Β', Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

**Άσκηση 1.** Αν  $a = 2^{2005} + 2^{-2005}$  και  $\beta = 2^{2005} - 2^{-2005}$  τότε η τιμή του  $\alpha^2 - \beta^2$  είναι:

- A. 2      B.  $2^{2005}$       Γ. 4      Δ.  $2 \cdot 2^{-2005}$       E. Κανένα από τα προηγούμενα

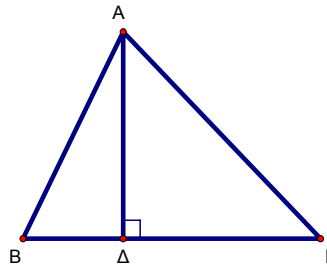
**Άσκηση 2.** Πόσα ζευγάρια θετικών ακεραίων  $(x, y)$  ικανοποιούν την εξίσωση  $5x + 15y = 2004$ .

- A. κανένα      B. τρία      Γ. δυο      Δ. τέσσερα      E. ένα

**Άσκηση 3.** Αν  $1 \leq x \leq 2$  τότε η τιμή της παράστασης  $K = (\sqrt{x-1})^2 + \sqrt{(x-2)^2}$  είναι:

- A. 3      B. -3      Γ. 0      Δ. 2      E. 1

**Άσκηση 4.** Στο διπλανό σχήμα το  $A\Delta > 1$  είναι ύψος και  $(AB) = \sqrt{2}$ ,  $(B\Gamma) = \sqrt{3}$ ,  $\angle \Gamma = 45^\circ$ .



Το  $A\Delta$  είναι:

- A.  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$       Γ.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       Δ.  $\frac{3}{2}$       E. Κανένα από τα προηγούμενα

**Άσκηση 5.** Το πλήθος των θετικών ακεραίων αριθμών που είναι μικρότεροι από το 2000 και δεν διαιρούνται ούτε με το 3, ούτε με το 5 είναι:

- A. 769      B. 1065      Γ. 1067      Δ. 1069      E. 1070

**Άσκηση 6.** Πόσοι τετρανήφιοι αριθμοί  $N = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$  (σε δεκαδική μορφή) ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες

(α)  $2000 \leq N < 4000$

(β) είναι πολλαπλάσιοι του 3 και του 5

(γ)  $\beta, \gamma$  πρώτοι αριθμοί με  $\beta \leq \gamma$  και  $\beta + \gamma$  άρτιος αριθμός.

A. 18

B. 36

Γ. 10

Δ. 48

E. 24

**Άσκηση 7.** Αν  $\frac{y}{x} = \frac{3x+y-\omega}{6x-y-z} = \frac{y+\omega}{7y-x+z}$  με  $x, y, z, \omega > 0$ ,  $6x \neq y+z$ ,  $7y \neq x-z$

τότε η τιμή του  $\frac{x}{y}$  είναι:

A.  $\frac{1}{2}$

B. 2

Γ.  $\frac{1}{7}$

Δ. 3

E. 5

**Άσκηση 8.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{10}{\sqrt{x+2}-2}$ . Το πεδίο ορισμού της είναι:

A.  $(-\infty, 2]$

B.  $[0, 2]$

Γ.  $\mathbb{R} - \{2\}$

Δ.  $[-2, 2) \cup (2, +\infty)$

E.  $(-2, 2)$

**Άσκηση 9.** Το κλάσμα  $\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$  είναι ίσο με

A.

B.

Γ.

Δ.

E.

$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$

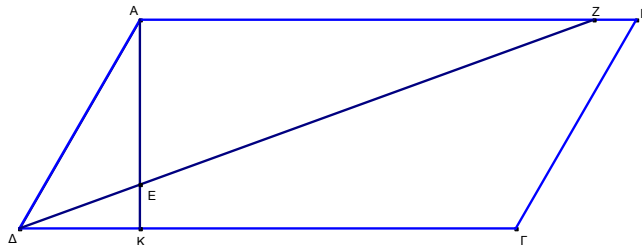
$1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$\frac{1}{3}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$

**Άσκηση 10.** Στο διπλανό σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο με  $\angle A\Delta\Gamma = 60^\circ$ ,  $\angle \Gamma\Delta Z = 20^\circ$  και  $AK \perp \Delta\Gamma$ .



Ποιό από τα παρακάτω είναι σωστό

A.  $EZ = 2AK$

B.  $AB = 2A\Delta$

Γ.  $EZ = 2A\Delta$

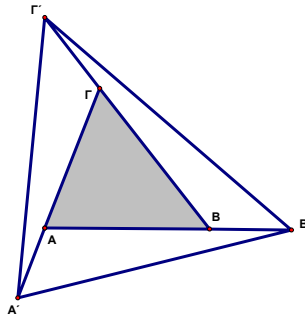
Δ.  $EZ = \sqrt{3} A\Delta$

E.  $\Delta E = 2EK$

**Άσκηση 11.** Αν  $2f(x) - f\left(\frac{4x+2}{x-4}\right) = 3x-1$ , το  $f(5)$  ισούται

- A.  $\frac{1}{2}$       B. 2005      Γ. -1      Δ. 4      E. 31

**Άσκηση 12.** Οι πλευρές AB, ΒΓ, ΓΑ προεκτείνονται κατά  $AA' = \frac{1}{2}ΓΑ$ ,  $BB' = \frac{1}{2}AB$  και  $ΓΓ' = \frac{1}{2}ΒΓ$ .



Αν το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι 1, τότε το εμβαδόν του τριγώνου A'B'Γ' είναι:

- A. 2      B.  $\frac{3}{2}$       Γ. 3      Δ.  $\frac{13}{4}$       E. 4

**Άσκηση 13.** Η κυρτή επιφάνεια ορθού κώνου είναι 3. Αν η απόσταση του κέντρου της βάσης από μια γενετήριά του είναι  $d$ , τότε ο όγκος του είναι:

- A.  $2d$       B.  $d$       Γ.  $d^3$       Δ.  $\frac{d}{3}$       E.  $3d$

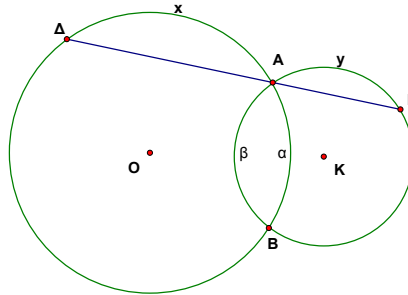
**Άσκηση 14.** Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα 6 και διάμετρος AB. Στην ακτίνα OB παίρνουμε σημείο Γ, ώστε  $ΟΓ=2$ . Χορδή EZ περνά από το Γ και  $\angle EΓB = 60^\circ$ . Το μήκος του EZ είναι :

- A. 10      B.  $\sqrt{6}$       Γ.  $4\sqrt{3}$       Δ.  $2\sqrt{33}$       E. Κανένα από τα προηγούμενα

**Άσκηση 15.** Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ( $\alpha \neq \beta$ ) ισχύουν  $\alpha^2 = 2\beta + 15$  και  $\beta^2 = 2\alpha + 15$ , τότε η τιμή του γινομένου  $\alpha\beta$  είναι :

- A. -9      B. 30      Γ. 15      Δ. 7,5      E. -11

**Άσκηση 16.** Στο διπλανό σχήμα τα τόξα  $\alpha$ ,  $\beta$  έχουν άθροισμα  $120^\circ$ .



Το  $x + y$  ισούται με

- A.  $90^\circ$       B.  $150^\circ$       Γ.  $100^\circ$       Δ.  $120^\circ$       E.  $240^\circ$

**Άσκηση 17.** Σε παραλληλόγραμμο με πλευρές 4 και 7 η διαφορά των διαγώνιων είναι 2. Τότε το άθροισμα των διαγώνιων του είναι:

- A. 11      B. 16      Γ. 28      Δ. 12      E. 14

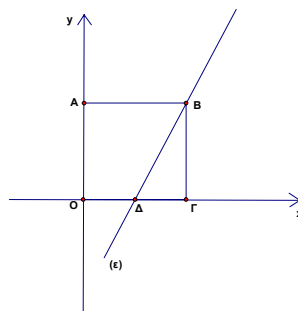
**Άσκηση 18.** Ένα σωληνάριο περιέχει  $154\text{cm}^3$  οδοντόπαστας. Αν πιέσουμε το σωληνάριο, ώστε να αδειάσει τελείως και η μορφή της οδοντόπαστας που βγαίνει είναι κυλινδρική με κάθετη διατομή διαμέτρου  $7\text{mm}$ , τότε το μήκος της οδοντόπαστας είναι (δίνεται  $\pi = \frac{22}{7}$ ):

- A.  $2\text{m}$       B.  $0,5\text{m}$       Γ.  $3\text{m}$       Δ.  $4\text{m}$       E.  $3,5\text{m}$

**Άσκηση 19.** N είναι ένας πενταψήφιος θετικός ακέραιος. Ένας εξαψήφιος ακέραιος P κατασκευάζεται με την προσθήκη του ψηφίου 1 στο τέλος του N και ένας άλλος εξαψήφιος Q κατασκευάζεται με την προσθήκη του ψηφίου 1 στην αρχή του N. Αν ο P είναι τριπλάσιος του Q, τότε ο N είναι :

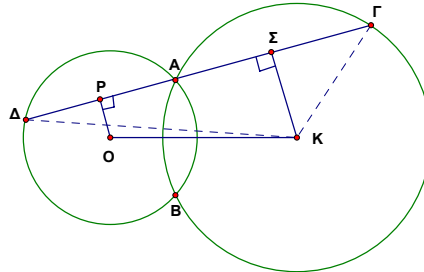
- A. 34587      B. 42857      Γ. 13867      Δ. 31287      E. Κανένα από τα προηγούμενα

**Άσκηση 20.** Το ABΓO είναι τετράγωνο πλευράς 1 και το Δ είναι το μέσον του OΓ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι :



- Α.  $x + y = 1$     Β.  $x + y = \frac{1}{2}$     Γ.  $y = 2x$     Δ.  $2x + y = 1$     Ε.  $y = 2x - 1$

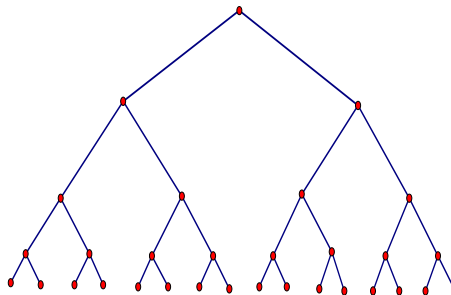
**Άσκηση 21.** Δυο κύκλοι  $(O, \rho)$  και  $(K, 2\rho)$  τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το Α φέρνουμε την  $\Gamma\Delta\Delta$  και  $\text{ΚΣ} \perp \Gamma\Delta$ ,  $\text{ΟΡ} \perp \Delta\Delta$ .



Αν  $\text{ΚΣ} = 2 \text{ΟΡ}$ , ο λόγος των εμβαδών του τετράπλευρου ΟΚΣΡ προς του τριγώνου ΓΚΔ είναι:

- Α. 2    Β.  $\frac{3}{2}$     Γ.  $\frac{3}{4}$     Δ. 1    Ε.  $\frac{1}{2}$

**Άσκηση 22.** Η Ομόνοια και ο Απόλλωνας είναι μεταξύ των 16 ομάδων που προκρίθηκαν σε ένα ευρωπαϊκό τουρνουά ποδοσφαίρου. Θεωρώντας ότι όλες οι ομάδες είναι εξίσου πιθανόν να νικήσουν σε κάθε αγώνα που παίζουν, πόσο πιθανόν είναι να αγωνιστούν μεταξύ τους οι δυο κυπριακές ομάδες, αν ο τρόπος οργάνωσης του τουρνουά είναι αυτός που φαίνεται στο σχήμα

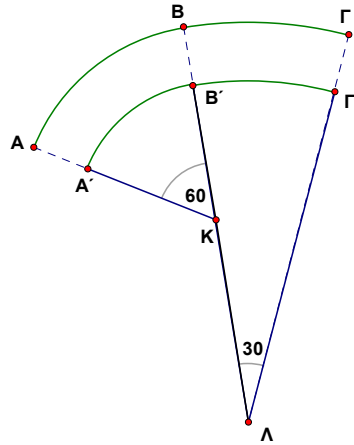


- Α.  $\frac{7}{8}$     Β.  $\frac{1}{2}$     Γ.  $\frac{1}{4}$     Δ.  $\frac{1}{8}$     Ε.  $\frac{1}{16}$

**Άσκηση 23.** Το γινόμενο των ψηφίων ενός τετραψήφιου αριθμού είναι 90. Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν

- Α. 24    Β. 45    Γ. 60    Δ. 30    Ε. 36

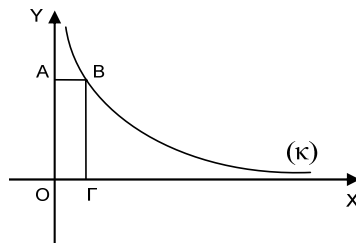
**Άσκηση 24.** Μια στροφή ενός δρόμου πλάτους  $5m$  σε όλο της το μήκος, έχει κατασκευαστεί ως εξής: τα τμήματα  $AB$ ,  $A'B'$  είναι τόξα ομόκεντρων κύκλων με κέντρο το  $K$ , ενώ τα τμήματα  $BΓ$ ,  $B'Γ'$  είναι τόξα ομόκεντρων κύκλων με κέντρο το σημείο  $A$  (σχήμα).



Αν  $\angle AKB = 60^\circ$  και  $\angle B\Lambda\Gamma = 30^\circ$ , τότε η διαφορά της εσωτερικής διαδρομής  $A'B'Γ'$  από την εξωτερική  $AB\Gamma$  είναι :

- A.  $5\pi m$     B.  $\frac{5\pi}{2} m$     Γ.  $10 m$     Δ.  $2 m$     Ε.  $\pi m$

**Άσκηση 25.** Η καμπύλη ( $\kappa$ ) έχει εξίσωση  $xy = c^2$  και το εμβαδόν του ορθογωνίου  $AB\Gamma O$  είναι 16. Η τιμή του  $c$  είναι :

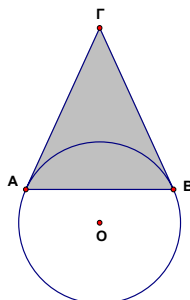


- A.  $\pm 4$     B. 2    Γ. 4    Δ. 16    Ε.  $\sqrt{2}$

**Άσκηση 26.** Τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει κορυφές  $A(0,3)$ ,  $B(4,0)$ ,  $\Gamma(x,5)$  με  $0 < x < 4$ . Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι 8, τότε το  $x$  ισούται :

- A. 1    B.  $\frac{4}{3}$     Γ. 2    Δ. 3    Ε.  $\frac{8}{3}$

**Άσκηση 27.** Δίνεται κύκλος  $(O,R)$  και χορδή  $AB=2\alpha$ . Αν  $\Gamma A, \Gamma B$  εφαπτόμενα τμήματα, το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι :



A.  $4\alpha R$

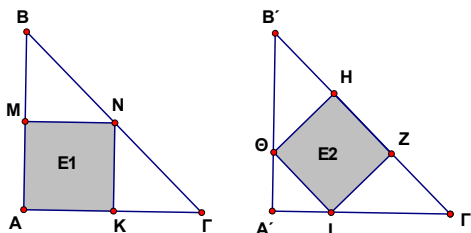
B.  $\frac{5\alpha^3}{R}$

Γ.  $10\alpha^2$

Δ.  $\frac{\alpha^3}{\sqrt{R^2 - \alpha^2}}$

Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

**Άσκηση 28.** Τα τρίγωνα  $AB\Gamma, A'B'\Gamma'$  είναι ίσα, τα  $MNKA, \Theta HZI$  είναι τετράγωνα και  $B'H=HZ=Z\Gamma'$ . Αν  $E_1 = \alpha^2$ , τότε ο λόγος  $\frac{E_1}{E_2}$  είναι:



A. 1

B.  $\frac{9}{8}$

Γ.  $\frac{8}{9}$

Δ.  $\frac{3}{4}$

Ε.  $\frac{3}{2}$

**Άσκηση 29.** Ένας σκιέρ ανεβαίνει με το τελεφερίκ τη χιονοδρομική πίστα με σταθερή ταχύτητα  $4 \frac{km}{h}$  και κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα  $24 \frac{km}{h}$ . Αν η χιονοδρομική πίστα έχει το ίδιο μήκος με τη διαδρομή που ακολουθεί το τελεφερίκ και αγνοήσουμε το χρόνο παραμονής στην κορυφή της πίστας, τότε η μέση ταχύτητα της συνολικής διαδρομής (άνοδος - κάθοδος) σε  $\frac{km}{h}$  είναι:

A. 14

B.  $\frac{48}{7}$

Γ. 10

Δ. 7

Ε.  $\frac{52}{7}$

**Άσκηση 30.** Η τιμή της παράστασης  $K = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}} - \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$  είναι:

A.  $-\frac{1}{2}$

B.  $\sqrt{2}$

Γ. 1

Δ.  $\frac{1}{2}$

Ε.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

### Απαντήσεις Ερωτήσεων

Ερ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	Γ	Α	Ε	Α	Γ	Γ	Β	Δ	Γ	Γ	Ε	Δ	Β	Δ	Ε	Ε	Β	Δ	Β	Ε	Γ	Δ	Γ	Β	Γ	Ε	Δ	Β	Β	Δ