



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
4^η ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Απρίλιος 2003

ΧΡΟΝΟΣ: 60 ΛΕΠΤΑ

Δοκίμιο για Α', Β', Γ' Λυκείου

Άσκηση 1. Η τιμή της παράστασης $5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4$ είναι:

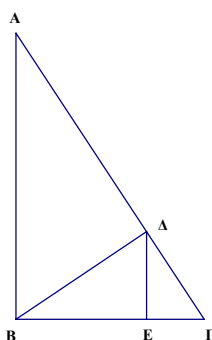
- A. 25^4 B. 5^5 Γ. 25^3 Δ. 5^{20} Ε. 25^{20}

Άσκηση 2. Στο σύνολο των ακεραίων ορίζουμε την πράξη (*): $\alpha * \beta = \alpha^3 - \beta$.

Η τιμή του $(2 * 2) * 1$ είναι:

- A. 215 B. 6 Γ. 7 Δ. 1024 Ε. 1

Άσκηση 3. Αν στο διπλανό σχήμα ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο ($\angle B = 90^\circ$) με ($\angle A = 30^\circ$), $AB=16$, $B\Delta \perp A\Gamma$ και $\Delta E \perp B\Gamma$ το μήκος του ΔΕ είναι:



- A. 8 B. 4 Γ. 2 Δ. 1 Ε. κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 4. Η γραφική παράσταση της $y = (3x^3 - 5x^2 + 2x) \cdot (x^2 + 4)^2$ τέμνει τον άξονα των x σε:

- A. 7 σημεία B. 5 σημεία Γ. 3 σημεία Δ. 0 σημεία Ε. 4 σημεία

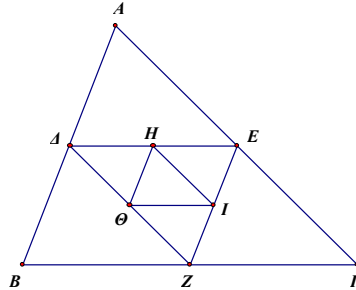
Άσκηση 5. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $y = f(x)$ με τύπο $f(x) = \frac{\sqrt{6-3x}}{x}$ είναι:

- A. $(-\infty, 2]$ B. $(-\infty, 2)$ Γ. $(-\infty, 0) \cup (0, 2)$ Δ. $(-\infty, 0) \cup (0, 2]$ Ε. $[2, +\infty)$

Άσκηση 6. Η απόσταση της κορυφής της παραβολής $y = (x-1)^2 + 1$ από την αρχή των αξόνων είναι:

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ Γ. $\frac{1}{2}$ Δ. 2 E. $2\sqrt{2}$

Άσκηση 7. Στο διπλανό σχήμα Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, ΔΕ, ΔΖ, ΖΕ αντίστοιχα. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 32, το εμβαδόν του τριγώνου ΗΘΙ είναι:



- A. 8 B. 16 Γ. 4 Δ. 2 E. 1

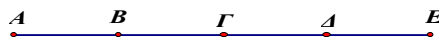
Άσκηση 8. Σε οικοδομικό συγκρότημα σχήματος κυρτού εξαγώνου οι πλευρές και οι διαγωνίες του είναι δρόμοι. Αν κάθε δρόμος πρέπει να φωτίζεται με μια τουλάχιστον λάμπα τότε για να φωτιστούν όλοι οι δρόμοι, χρειάζονται τουλάχιστον

- A. 5 λάμπες B. 6 λάμπες Γ. 7 λάμπες Δ. 8 λάμπες E. 9 λάμπες

Άσκηση 9. Η παράσταση $\sqrt[3]{\frac{(\sqrt[3]{2} + 1)^3 (\sqrt[3]{2} - 1)}{3}}$ ισούται:

- A. 3 B. 1 Γ. $\frac{1}{3}$ Δ. $\frac{2}{3}$ E. 2

Άσκηση 10. Στο παρακάτω σχήμα $AB=BG=\Gamma\Delta=\Delta E$.



Αν η το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων που δημιουργούνται από τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε τότε ο πληθικός αριθμός του συνόλου Μ των μέσων των πιο πάνω ευθυγράμμων τμημάτων είναι:

- A. 10 B. 5 Γ. 4 Δ. 7 E. 8

Άσκηση 11. Αν η κορυφή της παραβολής $y = x^2 + 6x + \mu$ βρίσκεται πάνω στον άξονα των x, η τιμή του μ είναι:

- A. 1 B. 9 Γ. -9 Δ. 0 E. 6

Άσκηση 12. Αν για την συνάρτηση $y = f(x)$ ισχύει $(f(x))^{25} = 2x$ για κάθε $x \in R$

τότε το $(f(f(x)))^{625}$ ισούται με:

- A. $2^{625} \cdot x$ B. $2^{25} \cdot x$ Γ. $2^{26} \cdot x$ Δ. $625 \cdot x$ E. $(2x)^{625}$

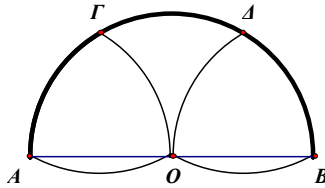
Άσκηση 13. Αν $\phi = 30^\circ$ η τιμή της παράστασης $T = (\eta\mu\phi + \sigma\upsilon\nu\phi)^2 - 2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi$ είναι:

- A. $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $1 - \frac{\sqrt{3}}{4}$ Γ. -1 Δ. 0 E. 1

Άσκηση 14. Ο μεγαλύτερος από τους πιο κάτω αριθμούς είναι:

- A. 20^{50} B. 6^{100} Γ. 3^{200} Δ. 2^{250} E. 4^{150}

Άσκηση 15. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου $AB=8$. Με κέντρα τα A, B και ακτίνα 4 γράφουμε τα τόξα ΓO και ΔO . Με κέντρα τα Γ, Δ και ακτίνα 4 γράφουμε τα τόξα AO και BO . Ο λόγος του εμβαδού του σκιασμένου μέρους προς το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι:



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ Γ. 1 Δ. $\frac{2}{3}$ E. $\frac{1}{3}$

Άσκηση 16. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων η ευθεία $\varepsilon_1 : y = x - 1$ τέμνει τους άξονες xx' και yy' στα σημεία A και B αντίστοιχα και η ευθεία $\varepsilon_2 : y = x + \kappa$ ($\kappa > 0$) τέμνει τον άξονα yy' στο Γ. Η κάθετη στον άξονα xx' στο A τέμνει την ε_2 στο Δ. Αν το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$ είναι 4, η τιμή του κ είναι:

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ Γ. 5 Δ. $\frac{1}{3}$ E. 3

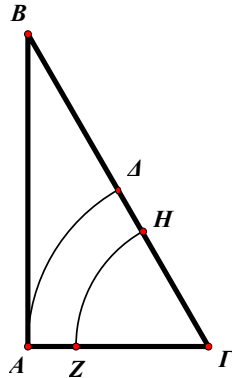
Άσκηση 17. Η τιμή της παράστασης $\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{47}\right)$ είναι:

- A. 6 B. 12 Γ. 94 Δ. $\frac{1}{94}$ E. 47

Άσκηση 18. Αν $T = \sqrt{2000} + \sqrt{2003}$ και $K = \sqrt{2001} + \sqrt{2002}$ ισχύει:

Α. $T > K$ Β. $T < K$ Γ. $T = K$ Δ. $T = 2K$ Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 19. Στο σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A η γωνία $B=30^\circ$ και $B\Gamma=8$. Το σκιασμένο χωρίο που είναι η διαφορά των κυκλικών τομέων $\Gamma A\Delta\Gamma$ και $\Gamma ZH\Gamma$ είναι $\frac{7\pi}{6}$. Το μήκος του AZ είναι:



Α. 7 Β. 1 Γ. $\frac{7}{2}$ Δ. $\frac{1}{2}$ Ε. 2

Άσκηση 20. Το πάτωμα ενός δωματίου είναι τετράγωνο και καλύπτεται πλήρως με n τετραγωνικά πλακίδια. Αν το πλήθος των πλακιδίων κατά μήκος των διαγωνίων είναι 43, τότε το n ισούται:

Α. 400 Β. 172 Γ. 43^2 Δ. 484 Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 21. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 3x + 5 = 0$, τότε η τιμή της παράστασης $M = \frac{\rho_1^2 + 5\rho_1 + 7}{\rho_1^2 + 7\rho_1 + 5} + \frac{\rho_2^2 + 5\rho_2 + 7}{\rho_2^2 + 7\rho_2 + 5}$ είναι:

Α. $\frac{10}{7}$ Β. $\frac{5}{3}$ Γ. $\frac{7}{10}$ Δ. $-\frac{7}{10}$ Ε. 15

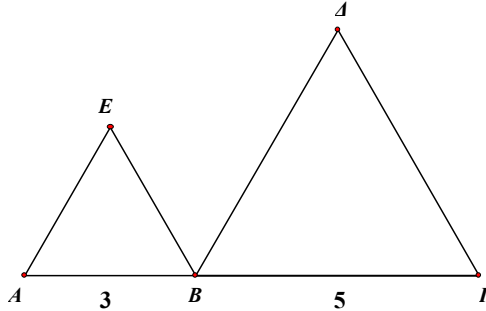
Άσκηση 22. Στον αριθμό $2003\alpha 1\beta$ το β είναι το ψηφίο των μονάδων και το α το ψηφίο των εκατοντάδων. Το πλήθος των δυνατών τιμών των ζευγών (α, β) είναι:

Α. 7 Β. 5 Γ. 4 Δ. 1 Ε. 0

Άσκηση 23. Η τιμή του κλάσματος $\frac{1+3+5+\dots+999}{1001+1003+1005+\dots+1999}$ είναι:

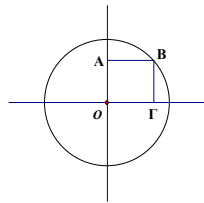
- Α. $\frac{1}{3}$ Β. $\frac{1}{2}$ Γ. 10^{-3} Δ. $\frac{1}{9}$ Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 24. Στο σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΔΓ είναι ισόπλευρα με πλευρές ΑΒ=3, ΒΓ=5. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΓ είναι:



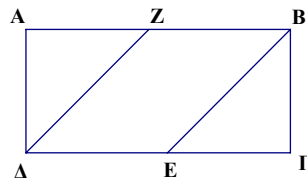
- Α. $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ Β. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ Γ. $\frac{49\sqrt{3}}{4}$ Δ. $\frac{28\sqrt{3}}{4}$ Ε. $\frac{15}{2}$

Άσκηση 25. Στο σχήμα $OA = OG = \sqrt{8}$. Το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας είναι:



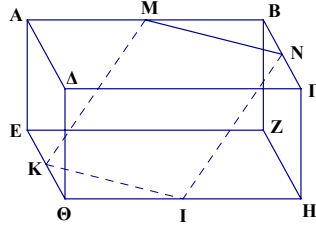
- Α. 8π Β. 16π Γ. $2\pi-4$ Δ. $8\pi-4$ Ε. $\pi+2$

Άσκηση 26. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και ΒΕ, ΔΖ διχοτόμοι των γωνιών Β και Δ αντίστοιχα και ΒΓ=1. Αν ΒΕΔΖ είναι ρόμβος το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι:



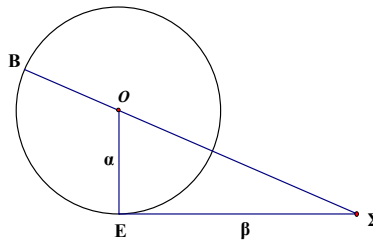
- Α. 2 Β. $1+\sqrt{2}$ Γ. $\sqrt{2}-1$ Δ. $4+2\sqrt{2}$ Ε. $2+\sqrt{2}$

Άσκηση 27. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔΕΘΙΚ είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο διαστάσεων ΑΒ=8, ΒΓ=6 και ΑΕ=5. Αν Μ, Ν, Ι και Κ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΘΗ και ΕΘ αντίστοιχα, η περίμετρος του τετραπλεύρου ΜΝΙΚ είναι:



- A. $20(\sqrt{2} + 1)$ B. $10(\sqrt{2} + 1)$ Γ. 20 Δ. $5\sqrt{2} + 5$ Ε. $10\sqrt{2} + 4$

Άσκηση 28. Δίνεται κύκλος (O, α) , ΟΕ ακτίνα του και ΣΕ εφαπτόμενο τμήμα.. Αν η ΣΑΒ είναι τέμνουσα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και ΣΕ = β η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 + 2ax - x^2 = 0$ όπου $a, \beta \in R^+$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα ;



- A. ΣΟ B. ΣΒ Γ. ΣΑ Δ. ΑΒ Ε. ΣΕ

Άσκηση 29. Η συνάρτηση $f(x) = [x]$ λέγεται «ακέραιο μέρος» και ορίζεται ως εξής: $\forall x \in R \quad f(x) = [x]$ είναι ο μέγιστος ακέραιος αριθμός ο οποίος είναι μικρότερος ή ίσος του x. [π.χ Αν $5 \leq x < 6$ τότε $f(x) = [x]=5$]. Αν $f(x) = x + [x] + \frac{1}{2}$ με $x \in [0,3)$, το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της f τις ευθείες $x=0, x=3$ και τον άξονα των x είναι:

- A. 9 B. $9\frac{1}{2}$ Γ. $\frac{15}{2}$ Δ. $3\frac{1}{2}$ Ε. Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 30. Το πλήθος των ζευγών (x, y) των θετικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ είναι:

- A. 2 B. 1 Γ. 5 Δ. 4 Ε. 3

Απαντήσεις Ερωτήσεων

Ερ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	Β	Α	Β	Γ	Δ	Β	Δ	Α	Β	Δ	Β	Γ	Ε	Γ	Ε	Ε	Β	Β	Β	Δ	Γ	Α	Α	Γ	Γ	Β	Β	Γ	Α	Ε