ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

2η ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Απρίλιος 2001 ΧΡΟΝΟΣ:60 ΛΕΠΤΑ

Δοκίμιο για Α', Β', Γ' Λυκείου

Άσκηση 1. Εάν ο αριθμός β είναι θετικός και $\alpha = -\beta$, ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λάθος:

Α. $\alpha^2\beta > 0$ **Β.** $\alpha + \beta = 0$ **Γ.** $\alpha\beta < 0$ **Δ.** $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = 0$ **Ε.** $1 + \frac{\alpha}{\beta} = 0$

Άσκηση 2. Εάν το σημείο $(4,2)$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $(\chi,4)$ και $(3,\psi)$, τότε το χ+ψ ισούται με:

Α. 5 **Β.** 6 **Γ.** 7 **Δ.** –7 **Β.** 0

Άσκηση 3. Εάν $\alpha \circ \beta = \frac{3}{\alpha\beta}$, τότε η παράσταση $\alpha \circ (\beta \circ \gamma)$ ισούται με:

Α. $\frac{3}{\alpha\beta\gamma}$ **Β.** $\frac{\alpha}{\beta\gamma}$ **Γ.** $\frac{\beta\gamma}{\alpha}$ **Δ.** $\frac{3\alpha\beta}{\gamma}$ **Ε.** $9\alpha\beta\gamma$

Άσκηση 4. Η λύση της ανίσωσης $\frac{2\chi^2 - 3\chi + 4}{\chi^2 + 2} > 1$, είναι:

Α. χ<1 ή χ>2 **Β.** χ<-2 ή χ>-1 **Γ.** 1<χ<2 **Δ.** –2<χ<-1 **Ε.** Τίποτε από τα προηγούμενα

Άσκηση 5. Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $(3\chi^2 - 12\chi + 8)(\chi - 5) = 0$ ισούται με:

Α. –9 **Β.** 9 **Γ.** 10 **Δ.** 12 **Ε.** Τίποτε από τα προηγούμενα

Άσκηση 6. Εάν $f(\chi) = 9^\chi$ τότε η παράσταση $f(\chi+1) - f(\chi)$ ισούται με:

Α. 9 **Β.** $f(\chi)$ **Γ.** $3f(x)$ **Δ.** $8f(\chi)$ **Ε.** $9f(\chi)$

Άσκηση 7. Η παράσταση $\left(\chi^{-1} - \psi^{-1}\right)^{-1}$ ισούται με:

Α. $-\dfrac{\chi\psi}{\chi-\psi}$ **Β.** $\chi+\psi$ **Γ.** $\chi-\psi$ **Δ.** $\dfrac{\psi-\chi}{\chi\psi}$ **Ε.** $\chi^{-2}-\psi^{-2}$

Άσκηση 8. Το πλήθος των ακεραίων λύσεων της ανίσωσης $\nu^2-7\nu+6\leq 0$ είναι:

Α. 0 **Β.** 4 **Γ.** 5 **Δ.** 6 **Ε.** περισσότερες από 7

Άσκηση 9. Δίνεται η εξίσωση $x^2-14x+\mu=0$, όπου μ είναι θετικός ακέραιος. Αν οι ρίζες της εξίσωσης ρ_1,ρ_2 είναι θετικοί και διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί, τότε η τιμή της παράστασης $\mathrm{K}=(\rho_1+\rho_2)^2+2\rho_1\cdot\rho_2$ ισούται με:

Α. 262 **Β.** 196 **Γ.** 210 **Δ.** 226 **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 10. Ο αριθμός $\sqrt{\left(4-\sqrt{18}\right)^2}$ είναι ίσος με:

Α. $4-3\sqrt{2}$ **Β.** $4+3\sqrt{2}$ **Γ.** 34 **Δ.** $3\sqrt{2}-4$ **Ε.** $-4-3\sqrt{2}$

Άσκηση 11. Η κλίση μιας ευθείας είναι μη μηδενική και ισούται με την τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας με τον y-άξονα Αν η ευθεία τέμνει τον x-άξονα στο α, τότε το α ισούται με:

Α. -1 **Β.** 2 **Γ.** $\dfrac{1}{2}$ **Δ.** -3 **Ε.** 5

Άσκηση 12. Εάν $f(\chi+3)=\dfrac{4}{2-\chi}$, τότε η συνάρτηση $f(x)$ ισούται με:

Α. $\dfrac{4}{5-\chi}$ **Β.** $\dfrac{4}{\chi-1}$ **Γ.** $\dfrac{\chi+5}{\chi-1}$ **Δ.** $\dfrac{4}{\chi-6}$ **Ε.** Τίποτα από τα προηγούμενα.

Άσκηση 13. Το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $\chi^2-\sigma\upsilon\nu\chi+2=0$ είναι:

Α. $\{-1\}$ **Β.** $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ **Γ.** $\left\{\sqrt{2}\right\}$ **Δ.** $\left\{2\sqrt{2}\right\}$ **Ε.** Τίποτε από τα προηγούμενα

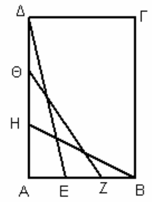
Άσκηση 14. Αν για να αγοράσουμε 25 ταχινόπιτες πρέπει να δώσουμε τόσες λίρες όσες ταχινόπιτες αγοράζουμε με μία λίρα ,τότε η μία ταχινόπιτα στοιχίζει:

Α. 25 σεντς **Β.** 15 σεντς **Γ.** 10 σεντς **Δ.** 20 σεντς **Ε.** 30 σεντς

Άσκηση 15. Δίνεται ένα κυρτό εικοσάγωνο $A_1A_2........A_{20}$.Ο αριθμός των διαγώνιων που ενώνουν τις κορυφές με άρτιους δείκτες (π.χ. A_2 A_4 , …) ισούται με:

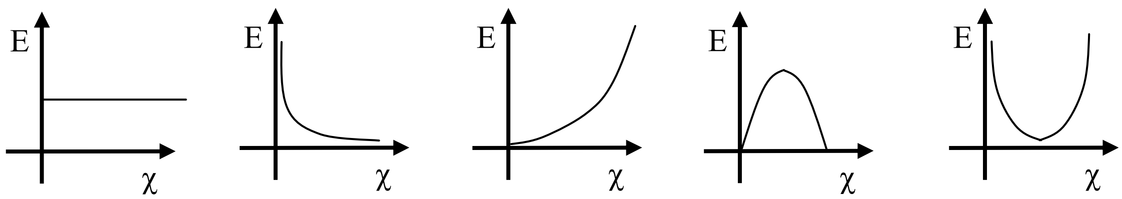
Α. 45 **Β.** 20 **Γ.** 65 **Δ.** 10 **Ε.** 40

Άσκηση 16. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $ΑΕ = ΕΖ = ΖΒ = 1$ και $ΑΗ = ΗΘ = ΘΔ = \chi \geq 1$. Αν $ΒΗ \cdot ΔΕ = ΘΖ^2$, το μήκος του ΑΔ ισούται με:



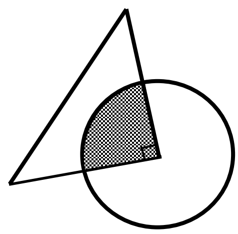
Α. $3\sqrt{3}$ **Β.** $3\sqrt{7}$ **Γ.** $\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$ **Δ.** $\sqrt{21}$ **Ε.** $3\sqrt{2}$

Άσκηση 17. Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο 26 cm. Το μήκος της μιας διάστασης του ισούται με χ cm. Η γραφική παράσταση του εμβαδού Ε, του ορθογωνίου, συναρτήσει του χ είναι:



Α. **Β.** **Γ.** **Δ.** **Ε.**

Άσκηση 18. Εάν το κέντρο του κύκλου με διάμετρο 4 είναι κορυφή ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα και το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής είναι $\dfrac{1}{3}$ του εμβαδού του τριγώνου τότε η κάθετη πλευρά του τριγώνου ισούται με:



Α. 4 **Β.** $\sqrt{6\pi}$ **Γ.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$ **Δ.** $\sqrt{6\pi}$ **Ε.** $\sqrt{3\pi}$

Άσκηση 19. Ο μικρότερος θετικός ακέραιος κ (κ>0) έτσι ώστε η παράσταση $(\kappa+1)+(\kappa+2)+\ldots+(\kappa+23)$ να είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού ισούται με:

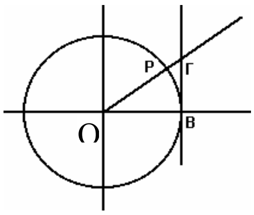
Α. 9 **Β.** 11 **Γ.** 13 **Δ.** 23 **Ε.** 29

Άσκηση 20. Δίνεται συνάρτηση $f:\chi \rightarrow \dfrac{1}{\chi^2}, \quad \chi \in \mathbb{R}-\{0\}$. Η παράσταση

$f\left(f\left(f\left(\chi\right)\right)\right)$ ισούται με:

Α. 16^2 **Β.** $\frac{1}{2^8}$ **Γ.** 2^{-4} **Δ.** 8^2 **Ε.** Τίποτε από τα προηγούμενα

Άσκηση 21. Στο σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ εφάπτεται του κύκλου ακτίνας 1 με κέντρο την αρχή Ο ορθοκανονικού συστήματος αξόνων. Εάν το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ρ$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ τότε το μήκος του τμήματος ΡΓ ισούται με:



Α. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **Β.** $\sqrt{3}-1$ **Γ.** $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$ **Δ.** 1 **Ε.** $\frac{3}{2}$

Άσκηση 22. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \chi-3=\chi\omega \\ \psi-1=\psi\omega \\ \chi^2+\psi^2=4 \end{cases}$ Η θετική τιμή του ψ η οποία επαληθεύει τις εξισώσεις ισούται με:

Α. $\frac{1}{\sqrt{10}}$ **Β.** $\frac{2}{\sqrt{10}}$ **Γ.** $\frac{3}{\sqrt{10}}$ **Δ.** $\frac{4}{\sqrt{10}}$ **Ε.** $\frac{6}{\sqrt{10}}$

Άσκηση 23. Έστω f συνάρτηση που ορίζεται για $\mu,\nu\in\mathbb{N}$ έτσι ώστε:

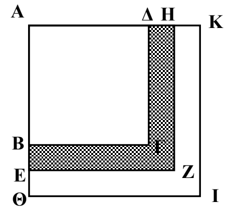
$(i)\ f(\mu)\in\mathbb{N}$, $(ii)\ f(2)=2$,

$(iii)\ f(\mu\nu)=f(\mu)\cdot f(\nu)$ $(iv)\ f(\mu)>f(\nu)$ όταν $\mu>\nu$

Η τιμή του f(3) ισούται με:

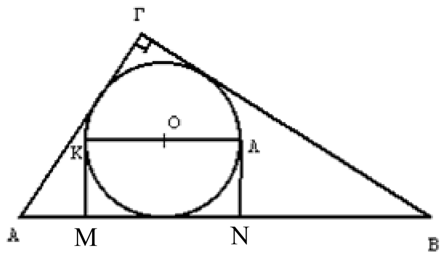
Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 4 **Δ.** 6 **Ε.** 16

Άσκηση 24. Οι πλευρές των τριών τετραγώνων ΑΒΓΔ, ΑΕΖΗ και ΑΘΙΚ στο διπλανό σχήμα, είναι ακέραιοι αριθμοί και το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας είναι 31. Αν ΒΕ=ΘΕ, το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΘΙΚ είναι:



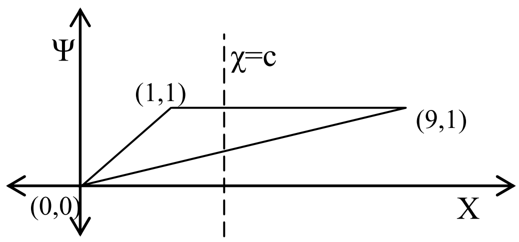
Α. 225 **Β.** 256 **Γ.** 289 **Δ.** 300 **Ε.** 961

Άσκηση 25. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο $\left(\hat{\Gamma} = 90°\right)$ και ο κύκλος με κέντρο Ο είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο. Αν ΚΛ διάμετρος, $ΚΛ // ΑΒ$, $ΚΜ \perp ΑΒ$ και $ΛΝ \perp ΑΒ$, η γωνία $\widehat{ΜΓΝ}$ ισούται με:



Α. 30° **Β.** 60° **Γ.** 50° **Δ.** 45° **Ε.** 35°

Άσκηση 26. Η ευθεία $\chi = c$ τέμνει το τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(1,1)$ *και* $(9,1)$ και το χωρίζει σε δύο μέρη. Εάν το εμβαδόν των δύο περιοχών στις οποίες χωρίζεται το αρχικό τριγώνου είναι ίσο, τότε η τιμή c ισούται με:



Α. $\frac{5}{2}$ **Β.** 3 **Γ.** $\frac{7}{2}$ **Δ.** $2\sqrt{3}$ **Ε.** $\sqrt{10}$

Άσκηση 27. Σε ένα διαγωνισμό Μαθηματικών πήραν μέρος 1000 μαθητές. Το δοκίμιο περιείχε 4 προβλήματα. Το πρώτο πρόβλημα απαντήθηκε σωστά από 900 ακριβώς μαθητές, το δεύτερο από 800, το τρίτο από 700 και το τέταρτο από 600. Κανένας από τους διαγωνιζόμενους δεν απάντησε σωστά και στα τέσσερα προβλήματα. Οι μαθητές που έλυσαν το τρίτο και το τέταρτο πρόβλημα πήραν μετάλλιο. Ο αριθμός των μαθητών που πήραν μετάλλιο ισούται με:

Α. 700 **Β.** 500 **Γ.** 300 **Δ.** 650 **Ε.** 200

Άσκηση 28. Δίνονται δύο ακολουθίες : $\alpha_\nu = \sqrt{123+\nu^2}$ και $\beta_\nu = \nu + 3$ όπου ν=1,2,3,… Έστω μ ο μικρότερος αριθμός έτσι ώστε $\alpha_\mu < \beta_\mu$ και ο κ είναι ο μεγαλύτερος αριθμός έτσι ώστε $\alpha_\kappa > \beta_\kappa + 1$. Η τιμή του $\mu + \kappa$ ισούται με:

Α. 25 **Β.** 30 **Γ.** 32 **Δ.** 33 **Ε.** 38

Άσκηση 29. Δίνονται οι συναρτήσεις $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ με $f_0(x) = \dfrac{1}{x-2}$ και

$f_{k+1}(x) = \dfrac{1}{1-f_k(x)}$ για κάθε k =0,1,2,…..,ν-1.Το $f_{2000}(2001)$ είναι:

Α. 2202 **Β.** 1999 **Γ.** –1998 **Δ.** 2001 **Ε.** -2000

Άσκηση 30. Το συνολικό άθροισμα των ψηφίων των αριθμών 2^{2001} και 5^{2001} είναι:

Α. 1999 **Β.** 2003 **Γ.** 4002 **Δ.** 6003 **Ε.** 2002

Απαντήσεις Ερωτήσεων

Ερ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	Δ	Α	Γ	Α	Β	Δ	Α	Δ	Α	Δ	Α	Α	Ε	Δ	Α	Γ	Δ	Δ	Β	Β	Γ	Β	Β	Γ	Δ	Β	Γ	Δ	Γ	Ε