



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$K(x) = \frac{(x+2)(2x-1)(x-1) + x - 4}{x^2 - 2}, \quad x \neq \pm\sqrt{2}.$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{2012 \cdot 4019 \cdot 2009 + 2006}{2010^2 - 2},$$

χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{c^2},$$

με άγνωστο το x , έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y = x^3 + 2x - 2, \quad z = y^3 + 2y - 2, \quad x = z^3 + 2z - 2.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο $c(O, R)$ στα σημεία Δ , E και Z αντίστοιχα. Από το σημείο Z , θεωρούμε παράλληλη στην $A\Gamma$, που τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο M . Από το σημείο E , θεωρούμε παράλληλη στην AB , που τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο N . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τετράπλευρα $BMOZ$ και ΓNOE είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω (c_1) και (c_2) , αντίστοιχα.

β) Το δεύτερο κοινό σημείο, έστω K , των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα ΔI , όπου I το έγκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!