



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
79<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
19 Ιανουαρίου 2019

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι τέτοιοι ώστε:  $\alpha^3 + \beta^3 = 2\alpha\beta(\alpha + \beta)$ ,

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  $K = \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ .

**Πρόβλημα 2**

Οι θετικοί ακέραιοι  $n, m$  είναι τέτοιοι, ώστε οι αριθμοί  $\frac{50}{3n-2}$  και  $\frac{243}{4m-1}$  να είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A = 2(n+1) - 3(m+2) + 7.$$

(β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση:  $B = \frac{162}{n^2} - \frac{m^2}{3721}$ .

**Πρόβλημα 3**

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς  $x, y, z$  που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\frac{y+3x}{xy} = \frac{3z+5y}{yz} = \frac{5x+z}{zx} = \frac{140}{x^2+y^2+z^2}$$

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 60^\circ$ . Η διάμετρος  $AE$  του περιγεγραμμένου κύκλου  $C(O, R)$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ , έτσι ώστε  $B\Delta = 2 \cdot \Delta\Gamma$ .

(α) Να αποδείξετε ότι:  $\Delta\hat{O}\Gamma = 30^\circ$

(β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $ABE\Gamma$  συναρτήσει της πλευράς  $B\Gamma = \alpha$ .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Καλή επιτυχία!*

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*