



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
17 Ιανουαρίου 2015
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παράσταση:
$$A = \frac{\alpha^2 - 1}{n^2 + \alpha n} \cdot \left(\frac{n^2}{n-1} - n \right) \cdot \frac{\alpha + n - \alpha n^3 - n^4}{1 - \alpha^2}$$
, με α πραγματικό

αριθμό μεγαλύτερο του 1 και n θετικό ακέραιο, $n > 1$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $A = n^2 + n + 1$

(β) Δεν είναι δυνατόν ο A να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Πρόβλημα 2

Στις εξετάσεις του Α. Σ. Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 40. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 46. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 28, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 32. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο ώστε $AB = B\Delta = \Gamma\Delta$. Φέρουμε το ύψος του ΔE , όπου E σημείο της πλευράς AB . Έστω Z το συμμετρικό της κορυφής A ως προς κέντρο το σημείο E . Έστω επίσης K το συμμετρικό της κορυφής Γ ως προς κέντρο το σημείο Z και Λ το συμμετρικό της κορυφής B ως προς κέντρο το σημείο A . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyzw} = 1000x + 100y + 10z + w$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 327 και υπόλοιπο 14. Επίσης ο αριθμός $\overline{wzyx} = 1000w + 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 227 και υπόλοιπο 16. Να βρεθεί ο αριθμός \overline{xyzw} .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία