



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Β' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq 5.$$

Να βρείτε τα ζεύγη (x, y) ακέραιων αριθμών, με $x < 0$, για τα οποία ισχύει ή ισότητα:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| = 5.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι

$$x^2(y^2 - 3y + 2) \leq 4y(y-1)(xy - 2x + 2y - y^2),$$

να αποδείξετε ότι: $|2y-3| \leq 1$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνα $AB\Delta$ ($AB = A\Delta$) και $A\Gamma E$ ($A\Gamma = AE$) με $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}E = \hat{\theta} < 90^\circ$. Οι BE και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο K . Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $A\Delta\Gamma$ και ABE τέμνονται στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}K = \Gamma\hat{A}M$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο αριθμός

$$\sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x}$$

είναι ακέραιος.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ