



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Α' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{|x|+x}{2} \leq \frac{|x|+3+x^2}{4}, \quad x(x^2+4)(x^2-5x+4) = 0.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να απλοποιήσετε τις κλασματικές παραστάσεις

$$A(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)(x^3 - y^3)(x^3 + y^3)}{(x^2 - y^2)(x^4 + y^4 + x^2y^2)} \quad \text{και} \quad B(x, y) = \frac{4x^2 + 16y^2 + 16xy - 25}{2x + 4y + 5},$$

αν $y \neq \pm x$ και $2x + 4y + 5 \neq 0$, και να λύσετε την εξίσωση

$$A(x, y) = B(x, y).$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ, E των πλευρών του AG, AB αντίστοιχα, ώστε $AD = AE$. Οι κύκλοι $c_1(B, BE)$ και $c_2(\Gamma, \Gamma\Delta)$ τέμνουν την ευθεία $B\Gamma$ στα σημεία B_1, B_2 και Γ_1, Γ_2 , αντίστοιχα. Το σημείο B_1 βρίσκεται εκτός του τμήματος $B\Gamma$ προς το μέρος του B και το σημείο Γ_2 βρίσκεται εκτός του τμήματος $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ .

Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα σημεία E, B_2, Γ_1, Δ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_3 .

(β) Τα σημεία E, B_1, Γ_2, Δ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_4 .

(γ) Το σημείο A και τα κέντρα των κύκλων c_3 και c_4 , βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνεται η εξίσωση

$$a^2x^2 + 2a(\sqrt{2}-1)x + \sqrt{x-2} + 3 - 2\sqrt{2} = 0,$$

όπου $x \in \mathbb{R}$ άγνωστος και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρος. Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a .

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ