



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{|x|-1}{3} \leq \frac{|x|+x^2}{4} \quad \text{και} \quad \frac{x+1}{2} + \frac{x(x+1)}{4} > \frac{(x+2)^2}{4}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{x+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{[(1+ax)^2 - (a+x)^2]}{1-a^2} = \frac{ab}{(a-b)^2},$$

για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών a, b με $ab(a-b)(1-a^2) \neq 0$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 90^\circ$ και $\hat{A} < 45^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Δ και E των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$, αντίστοιχα, και σημείο M διαφορετικό από το A στο ευθύγραμμο τμήμα AE . Αν η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος BM τέμνει την ευθεία ΔE στο Z και την ευθεία $A\Gamma$ στο Θ , να αποδείξετε ότι:

(α) $\hat{BMZ} = \hat{A}$.

(β) Η ευθεία BZ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Theta BE}$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Αν υπάρχουν ακέραιοι x, y, a που επαληθεύουν την εξίσωση

$$yx^2 + (y^2 - a^2)x + y(y-a)^2 = 0,$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός xy είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ