



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
70<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Α΄ τάξη Λυκείου

**Πρόβλημα 1**

(i) Να βρείτε τις τιμές του ρητού αριθμού  $\alpha$ , για τις οποίες ο αριθμός  $A = \alpha\sqrt{3}$  είναι ρητός.

*Μονάδες 2*

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $B = (1 + \sqrt{3})^2$  είναι άρρητος.

*Μονάδες 3*

**Πρόβλημα 2**

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x + 1 - 2|x| = \alpha x,$$

έχει, για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\alpha \in \mathbb{R}$ , μία τουλάχιστον πραγματική λύση.

Για ποιες τιμές του  $\alpha$  η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

*Μονάδες 5*

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται τρίγωνο  $ABC$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $C(O, R)$  και έστω  $A_1, B_1, C_1$  τα αντιδιαμετρικά σημεία των κορυφών του  $A, B, C$ . Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές  $BC, AC, AB$  θεωρούμε τα σημεία  $A_2, B_2, C_2$ , αντίστοιχα, και έστω  $(\varepsilon_1)$  η ευθεία που ορίζουν τα σημεία  $A_1, A_2$ ,  $(\varepsilon_2)$  η ευθεία που ορίζουν τα σημεία  $B_1, B_2$  και  $(\varepsilon_3)$  η ευθεία που ορίζουν τα σημεία  $C_1, C_2$ .

Έστω ακόμη  $(\delta_1)$  η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο  $A$  προς την  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\delta_2)$  η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο  $B$  προς την  $(\varepsilon_2)$  και  $(\delta_3)$  η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο  $C$  προς την  $(\varepsilon_3)$ . Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  και  $(\varepsilon_3)$  συντρέχουν (δηλαδή, περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες  $(\delta_1), (\delta_2)$  και  $(\delta_3)$  συντρέχουν.

*Μονάδες 5*

**Πρόβλημα 4**

Οι πραγματικοί αριθμοί  $x, y$  και  $z$  ικανοποιούν τις ισότητες:

$$x^3 - y^3 = 26z^3$$

$$x^2y - xy^2 = 6z^3.$$

(α) Να εκφράσετε τους  $x, y$  συναρτήσει του  $z$ .

*Μονάδες 3*

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι  $x + 2y + 3z = 8$ , να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  και  $z$ .

*Μονάδες 2*

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**