ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
32η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
28 Φεβρουαρίου 2015

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες θετικών ακέραιων (x,y,p), όπου p πρώτος, οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση
$$\frac{xy^3}{x+y}=p.$$

Πρόβλημα 2
Έστω $P(x)=ax^3+(b-a)x^2-(c+b)x+c$ και $Q(x)=x^4+(b-1)x^3+(a-b)x^2-(c+a)x+c$ πολυώνυμα μεταβλητής x, όπου a,b,c είναι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $b>0$. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες x_0, x_1, x_2, οι οποίες είναι ρίζες και του πολυωνύμου $Q(x)$, τότε:
(α) Να αποδείξετε ότι: $abc>28$.
(β) Αν a,b,c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι με $b>0$, ποιες είναι οι δυνατές τιμές τους;

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=105^\circ$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε $B\hat{\Delta}A=45^\circ$. Να αποδείξετε ότι:
(α) Αν το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε $\hat{\Gamma}=30^\circ$
(β) Αν $\hat{\Gamma}=30^\circ$, τότε το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Πρόβλημα 4
Τετράγωνο $ABCD$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του (στο σχήμα φαίνεται η περίπτωση για $n=5$). Τα σημεία που πλέγματος που βρίσκονται στις πλευρές και το εσωτερικό του τριγώνου ABD συνδέονται μεταξύ τους και με δύο τόξα κύκλων. Ξεκινώντας από το σημείο A, κινούμαστε προς τα δεξιά και προς τα άνω (η κίνηση γίνεται επάνω στα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τα στοιχειώδη τετράγωνα και τα τόξα των κύκλων). Πόσες είναι οι δυνατές διαδρομές από το σημείο A μέχρι το σημείο C;