ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
29η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2012

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Οι θετικοί ακέραιοι p, q είναι πρώτοι μεταξύ τους και ικανοποιούν την εξίσωση

$$p+q^2=\left(n^2+1\right)p^2+q,$$

όπου η παράμετρος n είναι θετικός ακέραιος. Βρείτε όλα τα δυνατά ζεύγη $\left(p,q\right)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να προσδιορίσετε όλα τα μη μηδενικά πολυώνυμα $P\left(x\right)$ και $Q\left(x\right)$ με πραγματικούς συντελεστές, ελαχίστου δυνατού βαθμού, τέτοια ώστε

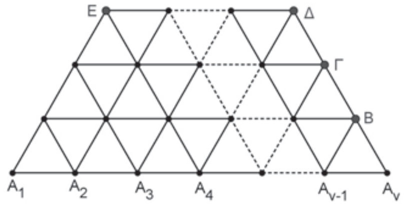
$$P\left(x^2\right)+Q\left(x\right)=P\left(x\right)+x^5Q\left(x\right),\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ), εγγεγραμμένο σε κύκλο c(Ο,R) (με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα R). Η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ στο σημείο Κ. Ο κύκλος $c_1(\mathrm{O}_1,R_1)$ (που έχει το κέντρο στην ΟΑ και περνάει από τα σημεία Α , Δ), τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Αν Μ , N είναι τα μέσα των ΖΓ και ΒΕ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι οι ευθείες ΕΖ, ΔΜ, ΚΓ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω Τ), οι ευθείες ΕΖ, ΔΝ, ΚΒ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω S) και ότι η ΟΚ είναι μεσοκάθετη της TS.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Το ισοσκελές τραπέζιο του σχήματος αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα που οι πλευρές τους έχουν μήκος 1. Η πλευρά $\mathrm{A}_1\mathrm{E}$ έχει μήκος 3 και η μεγάλη βάση του $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_\nu$ έχει μήκος $\nu-1$. Ξεκινάμε από το σημείο A_1 και κινούμαστε κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται μόνο προς τα δεξιά και επάνω (λοξά αριστερά ή λοξά δεξιά).



Υπολογίστε (συναρτήσει του ν ή ανεξάρτητα από αυτό) το πλήθος όλων των δυνατών διαδρομών που μπορούμε να ακολουθήσουμε, με σκοπό να καταλήξουμε στα σημεία Β, Γ, Δ, Ε, όπου ν ακέραιος μεγαλύτερος του 3.