ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
26η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{9n-1}{n+7}}$$

είναι ρητός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με περίκεντρο Ο και $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ έτσι ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}_1}$ και $\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma_1}$ με $\lambda > 0$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $\mathrm{AA}_2, \mathrm{BB}_2, \Gamma\Gamma_2$ συντρέχουν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν άθροισμα 2, να αποδείξετε ότι:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \leq 1.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ των οποίων οι εικόνες $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$, $\mathrm{A}_4, \mathrm{A}_5, \mathrm{A}_6$ είναι διαδοχικά σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνα $r > 0$. Αν w είναι μία λύση της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 w^2 + z_3 w + z_5 = 0 \quad \text{(I)},$$

$$z_2 w^2 + z_4 w + z_6 = 0 \quad \text{(II)}$$

να αποδείξτε ότι:

(α) Το τρίγωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{A}_5$ είναι ισόπλευρο,

(β) $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| + |z_4 - z_5| + |z_5 - z_6| + |z_6 - z_1| = = 3|z_1 - z_4| = 3|z_2 - z_5| = 3|z_3 - z_6|$.