

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Υπάρχουν κανονικά πολύγωνα των οποίων οι εξωτερικές γωνίες είναι αμβλείες;
2. Ποιο είναι το απόστημα κανονικού πολυγώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο;
3. Ένα κυρτό πολύγωνο είναι κανονικό όταν:
 - α. έχει μόνον τις πλευρές του ίσες,
 - β. έχει μόνον τις γωνίες του ίσες,
 - γ. είναι εγγράψιμο σε κύκλο και έχει τις πλευρές του ίσες.
4. Μεταξύ των λ_n , α_n και R ισχύει:

$$\alpha. \lambda_n^2 + \frac{\alpha_n^2}{4} = R^2 \qquad \beta. \lambda_n^2 + \alpha_n^2 = 4R^2$$

$$\gamma. \lambda_n^2 = 4(R^2 - \alpha_n^2) \qquad \delta. \lambda_n^2 + \alpha_n^2 = \frac{R^2}{4}$$

5. Μεταξύ των ω_n και φ_n ισχύει:

$$\alpha. \omega_n + \varphi_n = 1L \qquad \beta. \omega_n + \varphi_n = 2L$$

$$\gamma. \omega_n + \varphi_n = 270^\circ \qquad \delta. \omega_n + \varphi_n = 3L$$

(Στις ερωτήσεις 3, 4, και 5 κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας).

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να βρεθούν η γωνία και η κεντρική γωνία ενός κανονικού: πενταγώνου, εξαγώνου, δεκαγώνου και δωδεκαγώνου.
2. Αν η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 108° , τότε το πλήθος των πλευρών του είναι:
 - α. 15
 - β. 12
 - γ. 10
 - δ. 5
 - ε. 8
 Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.
3. Σε δύο κανονικά πεντάγωνα ο λόγος των πλευρών τους είναι $\lambda = 2$. Ποιος είναι ο λόγος των αποστημάτων, των ακτίνων τους, των περιμέτρων τους και των εμβαδών τους;
4. Τα πλήθη n_1 , n_2 των πλευρών δύο κανονικών πολυγώνων είναι αντίστοιχα ρίζες των εξισώσεων:

$$v^3 - 3v^2 - 7v - 15 = 0, \qquad 2v - 9 = \sqrt{v - 4}.$$
 Να αποδείξετε ότι τα πολύγωνα είναι όμοια.
5. Να αποδείξετε ότι το μόνο κανονικό πολύγωνο με γωνία οξεία είναι το ισόπλευρο τρίγωνο.
6. Αν ένα κανονικό n -γωνο και ένα κανονικό μ -γωνο ($\mu > n$) είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο, να αποδεί-

ξετε ότι

$$i) \lambda_n^2 - \lambda_\mu^2 = 4(\alpha_\mu^2 - \alpha_n^2),$$

$$ii) \lambda_n > \lambda_\mu \Leftrightarrow \alpha_n < \alpha_\mu.$$

7. Θεωρούμε ένα κανονικό πεντάγωνο $ABΓΔΕ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Να αποδείξετε ότι
 - i) κάθε διαγώνιος χωρίζει το πεντάγωνο σε ένα ισοσκελές τραπέζιο και σε ένα ισοσκελές τρίγωνο,
 - ii) η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}Γ$ είναι κάθετη στην πλευρά AE ,
 - iii) δύο διαγώνιοι που δεν έχουν κοινό άκρο σχηματίζουν με δύο πλευρές του πενταγώνου ρόμβο και
 - iv) αν H είναι το σημείο τομής της AG με τη BD , τότε $AH^2 = AG \cdot HG$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Το δάπεδο ενός δωματίου στρώθηκε με πλακίδια σχήματος κανονικών πολυγώνων με πλήθος πλευρών λ , μ , ν , όπου $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \lambda$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2}.$$
 2. Αν ένα πολύγωνο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο σε δύο ομόκεντρος κύκλους, να αποδείξετε ότι είναι κανονικό.
 3. Αν $A, B, Γ, Δ$ είναι διαδοχικές κορυφές ενός κανονικού n -γώνου ($n \geq 4$), να αποδείξετε ότι

$$AΓ^2 - AB^2 = AB \cdot AΔ.$$
 4. Αν E_{2n} είναι το εμβαδόν ενός κανονικού $2n$ -γώνου ($n > 4$), εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R) , να αποδείξετε ότι $E_{2n} = \frac{1}{2} P_n R$, όπου P_n η περίμετρος του κανονικού n -γώνου ακτίνας R .
 5. Αν λ_n' είναι πλευρά κανονικού n -γώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο και λ_n , α_n η πλευρά και το απόστημα αντίστοιχα, κανονικού n -γώνου εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο, να αποδείξετε ότι $R \cdot \lambda_n = \alpha_n \cdot \lambda_n'$.
 6. Αν $E_\alpha, E_\beta, E_\gamma$ είναι τα εμβαδά κανονικών n -γώνων που έχουν πλευρές ίσες αντίστοιχα με τις πλευρές α, β, γ ορθογώνιου τριγώνου $ABΓ$ ($\hat{A} = 1L$), να αποδείξετε ότι $E_\beta + E_\gamma = E_\alpha$.
- ### Σύνθετα θέματα
1. Οι Πυθαγόρειοι ισχυρίζονταν ότι υπάρχουν τρία μόνο κανονικά πολύγωνα των οποίων οι γωνίες μπορούν

να καλύψουν το επίπεδο γύρω από ένα σημείο. Τα κανονικά αυτά πολύγωνα είναι τα ισόπλευρα τρίγωνα, τα τετράγωνα και τα κανονικά εξάγωνα. Να αποδείξετε την αλήθεια του ισχυρισμού αυτού των Πυθαγορείων.

2. Έστω κανονικό n -γώνο και σημείο Σ στο εσωτερικό του. Αν d_1, d_2, \dots, d_n είναι οι αποστάσεις του Σ από τις

πλευρές του n -γώνου, να αποδείξετε ότι

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = n a_n,$$

όπου a_n το απόστημα του n -γώνου.

3. Σε κανονικό δεκάγωνο $AB\Gamma\Delta\dots K$ η πλευρά AB προεκτεινόμενη τέμνει την προέκταση της ακτίνας $O\Gamma$ στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι $AM=AD$.