

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται δύο κύκλοι (K,R) και (Λ,ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο A . Φέρουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα τους ΔE και την AB κάθετη στη ΔE . Να αποδείξετε ότι

$$AB = \frac{2R\rho}{R + \rho}.$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2. Μια μεταβλητή ευθεία ϵ , διέρχεται από το βαρύκεντρο Θ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ και τέμνει τις πλευρές AB , $A\Gamma$ στα Δ , E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\Delta B}{\Delta A} + \frac{E\Gamma}{EA} = 1.$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3. i) **Θεώρημα Μενελάου.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ευθεία ε που τέμνει τις ευθείες AB , $B\Gamma$, ΓA στα Δ , E , Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} \cdot \frac{EB}{E\Gamma} \cdot \frac{Z\Gamma}{ZA} = 1.$$

ii) **Θεώρημα Ceva.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E , Z των ευθειών $B\Gamma$, ΓA , AB , αντίστοιχα. Αν οι ευθείες $A\Delta$, BE και ΓZ συντρέχουν, τότε ισχύει:

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \cdot \frac{E\Gamma}{EA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1.$$

Να εξετασθεί και για τα δύο θεωρήματα, αν ισχύει το αντίστροφο.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\hat{A}Γ}$ τέμνει τη $ΒΔ$ στο E και τη $ΒΓ$ στο Z , να αποδείξετε ότι $\frac{EA}{EZ} - \frac{AΓ}{AB} = 1$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5. Δίνεται κύκλος διαμέτρου AB και χορδή $ΓΔ$ κάθετη στην AB . Αν M είναι σημείο της χορδής και οι ευθείες MA και MB τέμνουν τον κύκλο στα E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $EZ \cdot ZΔ = EΔ \cdot ZΓ$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. Αν τα σημεία (A,B) και (Γ,Δ) αποτελούν αρμονική τετράδα και το B είναι μεταξύ των Γ, Δ , να αποδείξετε ότι:

i) $OA^2 = OG \cdot OD$, όπου O το μέσο του AB .

ii)
$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AG} + \frac{1}{AD}.$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7. Να κατασκευαστεί εσωτερική ημιευθεία Ax της γωνίας \hat{A} τριγώνου $AB\Gamma$ τέτοια, ώστε αν Δ, E είναι οι προβολές των B, Γ στην Ax αντίστοιχα, να είναι $\frac{A\Delta}{AE} = \frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν είναι γνωστά τμήματα.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8. Δίνεται γωνία \hat{xOy} και σταθερό σημείο A στο εσωτερικό της γωνίας. Να κατασκευασθεί ευθεία, που να διέρχεται από το A και να τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα σημεία B και Γ , ώστε:

i) το A να είναι μέσο του $B\Gamma$,

ii) να είναι $AB = \frac{2}{3} B\Gamma$ και

iii) να είναι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν είναι γνωστά τμήματα.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9. Δύο κύκλοι (K,R) και (Λ,ρ) τέμνονται στα σημεία A και A' . Να κατασκευασθεί ευθεία, που να διέρχεται από το A και να τέμνει τους κύκλους στα σημεία B και Γ , ώστε να είναι:

i) $AB = A\Gamma$, ii) $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{3}{4}$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10. Αν AD , BE , $ΓZ$ είναι οι διχοτόμοι ενός τριγώνου $ABΓ$ και I είναι το έγκεντρο του τριγώνου, να αποδείξετε ότι

$$\frac{IA}{ID} + \frac{IB}{IE} + \frac{IG}{IZ} \geq 6.$$