

---

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

---

### B' ΟΜΑΔΑΣ

1. Ο  $n^{\text{ος}}$  όρος μιας ακολουθίας είναι  $a_n = 2^n \cdot \frac{1}{3^{n+1}}$ . Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τους  $a_1$  και  $\lambda$ .
2. Για ποια τιμή του  $n$  οι αριθμοί  $\sqrt{n-5}$ ,  $\sqrt[4]{10n+4}$ ,  $\sqrt{n+2}$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου;
3. Να δείξετε ότι:
  - i) τα τετράγωνα των όρων μιας γεωμετρικής προόδου σχηματίζουν επίσης γεωμετρική πρόοδο
  - ii) Αν υψώσουμε κάθε όρο μιας γεωμετρικής προόδου στην  $k$ , τότε προκύπτει πάλι γεωμετρική πρόοδος.
4. Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο, της οποίας το άθροισμα των δυο πρώτων όρων της είναι  $3+\sqrt{3}$  και το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της είναι  $4(3+\sqrt{3})$ .
5. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων δέκα όρων της γεωμετρικής προόδου, στην οποία είναι  $a_2 + a_6 = 34$  και  $a_3 + a_7 = 68$ .
6. Ο πληθυσμός μιας χώρας είναι 90 εκατομμύρια και παρουσιάζει ετήσια αύξηση 2%. Αν  $a_n$  είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από  $n$  χρόνια, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και το γενικό όρο της ακολουθίας ( $a_n$ ).  
- Ποιος θα είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από 10 χρόνια; [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].
7. Η ένταση του φωτός μειώνεται κατά 10%, όταν αυτό διέρχεται από ένα φίλτρο. Αν  $I_n$  είναι η ένταση του φωτός, αφού διέλθει διαδοχικά μέσα από  $n$  τέτοια φίλτρα, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και το γενικό όρο της ακολουθίας ( $I_n$ ).  
- Ποια θα είναι η ένταση του φωτός, αν διέλθει μέσα από 10 τέτοια φίλτρα και η αρχική ένταση είναι  $I_0$ ; [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

8. Σε ένα όργανο μουσικής ο τόνος  $C'$  έχει συχνότητα 261 Hz και η οκτάβα του  $C''$  έχει διπλάσια συχνότητα. Ανάμεσα στους  $C'$  και  $C''$  υπάρχουν 11 επιπλέον τόνοι, των οποίων οι συχνότητες σχηματίζουν με τις συχνότητες των  $C'$  και  $C''$  13 διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Να υπολογίσετε:
- το λόγο της προόδου,
  - τη συχνότητα του πέμπτου τόνου.
9. Το ψυγείο ενός φορτηγού περιέχει 40 lt νερό. Αδειάζουμε 4 lt νερό και το αντικαθιστούμε με αντιψυκτικό. Ύστερα αδειάζουμε 4 lt του μείγματος και το αντικαθιστούμε με αντιψυκτικό κ.ο.κ. Αν  $D_n$  είναι η ποσότητα του νερού στο ψυγείο, αφού εφαρμοσθεί η διαδικασία  $n$  φορές, να βρείτε:
- Έναν αναδρομικό τύπο της ακολουθίας ( $D_n$ ).
  - Την ποσότητα του αντιψυκτικού στο ψυγείο, αφού εφαρμοσθεί η διαδικασία 7 φορές. [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].
10. Λέγεται ότι ο εφευρέτης του σκακιού παρακλήθηκε από έναν Ινδό βασιλιά να ζητήσει όποια αμοιβή ήθελε για τη σπουδαία ιδέα του. Ο εφευρέτης ζήτησε να πάρει το ρύζι που θα μαζευόταν ως εξής: Στο 1ο τετραγωνάκι του σκακιού να έβαζε κάποιος έναν κόκκο ρυζιού, στο 2ο τετραγωνάκι 2 κόκκους, στο 3ο τετραγωνάκι 4 κόκκους, στο 5ο τετραγωνάκι 8 κόκκους κτλ. Να βρείτε πόσοι τόνοι θα ήταν η ποσότητα αυτή του ρυζιού, αν 1 Kg ρυζιού έχει 20000 κόκκους.
11. Κάθε πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου χωρίζεται σε τρία ίσα τμήματα. Το μεσαίο τμήμα κάθε πλευράς αντικαθίσταται από τις δυο πλευρές ισόπλευρου τριγώνου. Στο σχήμα με μορφή αστεριού που προκύπτει αντικαθιστούμε πάλι το μεσαίο  $\frac{1}{3}$  κάθε πλευράς με δυο πλευρές ισόπλευρου τριγώνου. Με ανάλογο τρόπο συνεχίζουμε για κάθε σχήμα που προκύπτει από τη διαδικασία αυτή.



- Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο και το γενικό όρο της ακολουθίας ( $S_n$ ) που εκφράζει το πλήθος των πλευρών κάθε σχήματος.
- Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο και το γενικό όρο της ακολουθίας ( $U_n$ ) που εκφράζει την περίμετρο κάθε σχήματος, αν το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά ίση με 1.