ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ EULER

Έχω διαφορική εξίσωση της μορφής $A(\alpha x+\beta)^2 y''+B(\alpha x+\beta)y'+\Gamma\gamma=f(x)$. Αυτή η διαφορική ονομάζεται διαφορική Euler.Για την επίλυση της απαιτείται να θέσουμε $\alpha x+\beta=e^t$

ΑΣΚΗΣΗ ΠΑΝΩ ΣΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ EULER

$x^2 y''-2xy'+2y=3x^2+2\ln x$ (1)

Θέτω $x=e^t \quad \Rightarrow dx=e^t dt \quad \Rightarrow \dfrac{dt}{dx}=e^{-t}$. Ακόμη ορίζω την

$y=y(x)=y(e^t)=Y(t)=Y$

$\Rightarrow y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dY}{dx}=\dfrac{dY}{dt}\dfrac{dt}{dx}=Y'e^{-t}$

$\Rightarrow y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{d(Y'e^{-t})}{dx}=\dfrac{d(Y'e^{-t})}{dt}\dfrac{dt}{dx}$

$\Rightarrow y''=(y''-y')e^{-2t}$ Αντικαθιστώ στην (1) και έχω

$\Rightarrow e^{2t}(y''-y')e^{-2t}-2e^t y'e^{-t}+2y=3e^{2t}+2\ln e^t$

$\Rightarrow y''-3y'+2y=3e^{2t}+2t$

Η γενική λύση είναι $y=y_0+y_{\mu 1}+y_{\mu 2}$. Η ομογενής δίνει

$y''-3y'+2y=0 \quad \Rightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=1$ και $\lambda_2=2$.

$y_0=c_1e^t+c_2e^{2t}$. Τώρα αναζητώ την πρώτη μερική λύση η οποία θα δοθεί από την εξίσωση $y''-3y'+2y=3e^t$ (2) .Χρησιμοποιώντας μέθοδο Euler για την εκθετική συνάρτηση της διαφορικής εξισώσεως έχουμε $y_{\mu 1}=\mathrm{A}e^t t^k$ με κ=1 αφού η πολλαπλότητα της τιμής τιμή 1 στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι 1. Άρα $y_{\mu 1}=\mathrm{A}e^t t$. Παραγωγίζοντας την μερική λύση μια και δύο φορές έχω

$\Rightarrow y'_{\mu 1} = \mathrm{A}e^t t \ + Ae^t$ και $\Rightarrow y''_{\mu 1} = 2\mathrm{A}e^t \ + Ae^t t$. Αντικαθιστώντας στην διαφορική (2) έχουμε

$$\Rightarrow y''_{\mu} - 3y'_{\mu} + 2y_{\mu} = 3e^t$$

$$\Rightarrow 2\mathrm{A}e^t + Ate^t - 3Ate^t - 3Ae^t + 2Ate^t = 3e^t$$

$\Rightarrow A = -3$ Άρα $y_{\mu 1} = -3e^t t$.

Αναζητώντας τη δεύτερη μερική λύση της εξίσωσης και σύμφωνα με την παρατήρηση που κάναμε πρέπει να λύσω την $y_{\mu 2} : y'' - 3y' + 2y = 2t$. Κάνουμε ξανά χρήση της μεθόδου euler αλλά αυτή τη φορά για την πολυωνυμική συνάρτηση της διαφορικής εξίσωσης .

$$\left\{\begin{array}{l} y_{\mu 2} = (At + B)t^{\kappa}, \kappa = 0 \\ y'_{\mu 2} = A \\ y''_{\mu 2} = 0 \\ \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y_{\mu 2} : y'' - 3y' + 2y = 2t$$

$$\Rightarrow -3A + 2At + 2B = 2t \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2A = A \\ -3A + 2B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow y_{\mu 2} = t + \frac{3}{2}$$

Άρα η γενική λύση είναι $y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - 3e^t t + t + \dfrac{3}{2}$

$$\Rightarrow y = c_1 x + c_2 x^2 - 3x \ln x + \ln x + \frac{3}{2}$$

<u>ΘΕΜΑ</u>

Να βρεθεί η τιμή του α για την οποία η λύση του προβλήματος $x^2 + y'' - 2y = 0$ (1) με $y(1) = 1$ και $y'(1) = \alpha$ είναι φραγμένη καθώς το x τείνει στο μηδέν $x \to 0$.

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για μια διαφορική Euler , άρα θα θέσω $x = e^t$

$\Rightarrow dx = e^t dt \quad \Rightarrow \dfrac{dt}{dx} = e^{-t}$.

Ακόμη ορίζω την

$y = y(x) = y(e^t) = Y(t) = Y$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx} = \frac{dY}{dt}\frac{dt}{dx} = Y'e^{-t}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(Y'e^{-t})}{dx} = \frac{d(Y'e^{-t})}{dt}\frac{dt}{dx}$$

$\Rightarrow y'' = (y'' - y')e^{-2t}$.

Αντικαθιστώ στην (1) και έχω

$\Rightarrow e^{2t}(y'' - y')e^{-2t} - 2y = 0$

$\Rightarrow y'' - y' - 2y = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = -1$.

Η διαφορική που μας δόθηκε είναι ομογενής από την αρχή άρα η γενική λύση της είναι $\Rightarrow y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$. (2)

Όμως από υπόθεση $\Rightarrow y(1) = 1 \quad \Rightarrow Y(0) = 1$ αλλά και

$y'(1) = \alpha \quad \Rightarrow y'(1) = e^0 \mathrm{Y}'(0) = \mathrm{Y}'(0) \quad \Rightarrow \mathrm{Y}'(0) = \alpha$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{Y}(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ \\ &\mathrm{Y}'(0) = -c_1 + 2c_2 = \alpha \end{aligned} \right\}$$ Με πρόσθεση κατά μέλη έχω

$\Rightarrow \mathrm{Y}(0) + \mathrm{Y}'(0) = 3c_2 = \alpha + 1$

$\Rightarrow c_2 = \frac{\alpha+1}{3}$ και $\Rightarrow c_1 = \frac{2-\alpha}{3}$. Άρα η γενική λύση είναι $\mathrm{Y} = \frac{2-\alpha}{3}e^{-t} + \frac{a+1}{3}e^{2t}$ $\Rightarrow y = \frac{2-\alpha}{3}\frac{1}{x} + \frac{a+1}{3}x^2$. Για να είναι φραγμένη καθώς το x τείνει στο μηδέν ,αυτή η γενική λύση πρέπει ο συντελεστής του όρου $\frac{1}{x}$ να είναι μηδέν. Άρα $\frac{2-\alpha}{3}$=0 $\Rightarrow \alpha = 2$ και έτσι η γενική λύση γίνεται $y = x^2$.