

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΜΕΡΟΣ 1^ο - ΑΛΓΕΒΡΑ

Διαγώνισμα στο 1^ο κεφάλαιο

Θέμα 1^ο

Α. 1) Πότε μια αλγεβρική παράσταση λέγεται μονώνυμο και από ποια μέρη αποτελείται. Δώστε ένα παράδειγμα μονωνύμου.

Απάντηση

Στην 1^η σελίδα της παραγράφου 1.2.

Οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται **μονώνυμα**.

Παράδειγμα μονωνύμου: $3xy^2$

2) Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι μονώνυμα;

α) $3xy^2$ β) $223x^2y^{-2}$ γ) $(2 + \sqrt{5})xy^2$ δ) $(x + 2y)xy^2$ ε) $(2x + \sqrt{7})xy^2$

Απάντηση

α και γ

Στο β) υπάρχει αρνητικός εκθέτης.

Στα δ) και ε) υπάρχει άθροισμα μονωνύμων : $x + 2y$ και $2x + \sqrt{7}$.

3) Πότε δύο μονώνυμα λέγονται όμοια; Να δώσετε ένα παράδειγμα.

Απάντηση

Δύο μονώνυμα λέγονται όμοια λέγονται όμοια όταν έχουν ίδιο κύριο μέρος.

Τα μονώνυμα xy^2 , $3xy^2$ και $(3 + \sqrt{2})xy^2$ είναι όμοια.

B) Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

$$(x+y)^3 = \dots\dots\dots$$

$$(x-y)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(x-y)(x+y) = \dots\dots\dots$$

$$x^3 - y^3 = \dots\dots\dots$$

Απάντηση

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

Θέμα 2^ο

A. α) Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{x+5}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-5}{2}\right)^2 = 5x$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{x+5}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-5}{2}\right)^2 = 20$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{A. } \alpha) \quad \left(\frac{x+5}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-5}{2}\right)^2 &= \frac{x^2 + 10x + 25}{4} - \frac{x^2 - 10x + 25}{4} \\ &= \frac{x^2 + 10x + 25 - x^2 + 10x - 25}{4} = \frac{20x}{4} = 5x \end{aligned}$$

β) Δεδομένου ότι $\left(\frac{x+5}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-5}{2}\right)^2 = 5x$

η εξίσωση $\left(\frac{x+5}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-5}{2}\right)^2 = 20$ γράφεται $5x = 20 \Leftrightarrow x = 4$

Β. α) $2x^2 - 14x + 12 = 2(x^2 - 7x + 6) = 2(x-1)(x-6)$

β) $2x^2 - 14x + 12 = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)(x-6) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1) = 0 \quad \eta \quad (x-6) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \quad \eta \quad x = 6$

Θέμα 3^ο

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $x^3 - 36x$

β) Να κάνετε την πράξη $\frac{x^3 - 108}{x^3 - 36x} - \frac{3}{x} - \frac{x}{x-6}$

Λύση

α) $x^3 - 36x = x(x^2 - 36) = x(x-6)(x+6)$

β) ΕΚΠ = $x(x-6)(x+6)$

$$\frac{x^3 - 108}{x^3 - 36x} - \frac{3}{x} - \frac{x}{x-6} = \frac{x^3 - 108}{x(x-6)(x+6)} - \frac{3}{x} - \frac{x}{x-6}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^3 - 108}{x(x-6)(x+6)} - \frac{3(x-6)(x+6)}{x(x-6)(x+6)} - \frac{x \cdot x(x+6)}{x(x-6)(x+6)} \\
 &= \frac{x^3 - 108}{x(x-6)(x+6)} - \frac{3(x^2 - 36)}{x(x-6)(x+6)} - \frac{x^2(x+6)}{x(x-6)(x+6)} \\
 &= \frac{x^3 - 108 - x^2 + 108 - x^3 + 6x^2}{x(x-6)(x+6)} = \frac{5x^2}{x(x-6)(x+6)}
 \end{aligned}$$

Θέμα 4^ο

α) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

β) Αν $x + \frac{1}{x} = 7$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $K = x^3 + \frac{1}{x^3}$

Λύση

Μπορούμε να ξεκινήσουμε από το 2^ο μέλος

$$\begin{aligned}
 \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) &= x^3 + 3x^2 \frac{1}{x} + 3x \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 - 3x - 3\frac{1}{x} \\
 &= x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - 3x - 3\frac{1}{x} = x^3 + \frac{1}{x^3}
 \end{aligned}$$

β) Δεδομένου ότι $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$. Αν $x + \frac{1}{x} = 7$:

$$K = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 7^3 - 3 \cdot 7 = 343 - 21 = 322$$