ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Σχολικό σελ. 135

Α.2. Σχολικό σελ. 51

Α.3. Σχολικό σελ. 23

Α.4. α) Σ

β) Λ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β.1.

Θέτουμε $u = x + 1$, άρα $x = u - 1$ και

$$f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x} \Rightarrow f(u) = u \cdot e^{-(u-1)} = u \cdot e^{1-u}$$

ή ισοδύναμα:

$$f(x) = x \cdot e^{1-x}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Β.2.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (1-x)' = e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = e^{1-x} \cdot (1-x)$$

Οπότε:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου και μονοτονίας:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

Άρα η fείναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και φθίνουσα στο $[1, +\infty)$και παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 1$.

Β.3.

$f''(x) = (e^{1-x})' \cdot (1-x) + e^{1-x} \cdot (1-x)' =$
$= e^{1-x} \cdot (1-x)' \cdot (1-x) + e^{1-x}(-1) =$
$= -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x} =$
$= e^{1-x} \cdot (x-2)$

Οπότε:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα κυρτότητας της f:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⌒		⌣

Άρα για $x = 2$έχουμε σημείο καμπής με $f(2) = 2 \cdot e^{1-2} = \frac{2}{e}$.

Στο $(-\infty, 2)$η fείναι κοίλη (κοίλα προς τα κάτω), ενώ στο $(2, +\infty)$ η fείναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα πάνω).

Ασύμπτωτες ευθείες της $f(x) = x \cdot e^{1-x}$:

Κατακόρυφες δεν έχει, διότι η fορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αναζητούμε ασύμπτωτες της μορφής $y = ax + \beta$, πρώτα στο $+\infty$:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$$

και:

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} xe^{1-x} = e \cdot \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} =$$

$$= e \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \underset{(DLH)}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} e \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ στο $+\infty$.

Και έπειτα αναζητούμε ασύμπτωτες της μορφής $y = ax + \beta$ στο $-\infty$:

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = e^{+\infty} = +\infty$$

Άρα δεν υπάρχουν ασύμπτωτες στο $-\infty$.

Β.4. i)

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{1-x} = e \cdot \lim_{x\to-\infty} x \cdot \frac{1}{e^x} = e \cdot (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (από Β.3.)

Χωρίζουμε το πεδίο ορισμού στα δύο διαστήματα μονοτονίας:

$\Delta_1 = (-\infty, 1]$, $\quad \Delta_2 = (1, +\infty)$

και βρίσκουμε την εικόνα της f καθενός από αυτά, λόγω συνέχειας και μονοτονίας:

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$$
$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x)\right) = (0,1)$$

Το σύνολο τιμών της f είναι η ένωση των δύο αυτών εικόνων:

$f(\mathbb{R}) = (-\infty, 1]$

ii)

Α’ τρόπος:

Έχουμε ότι $f\big([1,+\infty)\big) = (0{,}1]$και στο $[1,+\infty)$η fείναι γνησίως φθίνουσα.

Έχουμε ότι $f([0{,}1]) = [0{,}1]$και στο $[0{,}1]$η fείναι γνησίως αύξουσα.

Έχουμε ότι $f\big((-\infty,0)\big) = (-\infty,0)$και στο $(-\infty,0)$η fείναι γνησίως αύξουσα.

Αν $\lambda > 1$ η $f(x) = \lambda$ δεν έχει ρίζα γιατί $\lambda \neq f(\mathbb{R})$.

Αν $\lambda < 0$ η $f(x) = \lambda$ έχει μοναδική ρίζα $x_1 \in (-\infty,0)$ η fείναι γνησίως μονότονη.

Αν $\lambda = 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$.

Αν $0 < \lambda < 1$ η $f(x) = \lambda$ έχει δύο ρίζες x_3, x_4με $x_3 \in (0{,}1)$και $x_4 \in (1,+\infty)$επειδή σε καθένα από αυτά τα διαστήματα η fείναι μονότονη.

Αν $\lambda = 1$, $f(x) = 1 \Leftrightarrow x_5 = 1$.

Συγκεντρωτικά:

Για $\lambda \leq 0$, μία ρίζα.

Για $0 < \lambda < 1$, δύο ρίζες.

Για $\lambda = 1$, μία ρίζα.

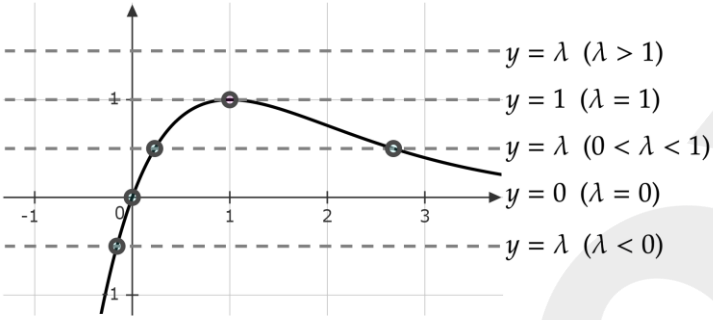
Για $\lambda > 1$, καμία ρίζα.

Β’ τρόπος:

Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	

και επιπλέον ότι $f(0) = 0$. Άρα η γραφική παράσταση της fείναι όπως στην εικόνα:



Φέρνοντας οριζόντιες ευθείες $y = \lambda$ παίρνουμε το πλήθος των σημείων τομής τους με την γραφική παράσταση της f. Τα σημεία αυτά αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $f(x) = \lambda$ για τις διαφορετικές τιμές του λ.

Παρατηρούμε ότι:

Αν $\lambda \leq 0$, η C_f και η $y = \lambda$ τέμνονται σε 1 μόνο σημείο, άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μία ρίζα.

Αν $0 < \lambda < 1$, η C_f και η $y = \lambda$ τέμνονται σε 2 σημεία, άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δύο ρίζες.

Αν $\lambda = 1$, η C_f και η $y = 1$ τέμνονται σε 1 μόνο σημείο, άρα η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μία ρίζα.

Αν $\lambda > 1$, η C_f και η $y = \lambda$ δεν τέμνονται σε κανένα σημείο, άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1.

Για $x < 0$είναι συνεχήςκαι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.

Για $0 < x \leq \frac{3\lambda}{2}$είναι συνεχής και παραγωγίσιμη αφού το συνημίτονο είναι συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Για τη συνέχεια στο $x = 0$έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sigma\upsilon\nu(x) = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ax^3 - 3x^2 - x + 1 = 1$$

Άρα $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$.

Άρα η f είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Όσον αφορά την παραγωγισιμότητα στο $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu(x) - 1}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax^3 - 3x^2 - x}{x} = \lim_{x\to 0^-} ax^2 - 3x - 1 = -1$$

Αφού τα δύο πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, δεν υπάρχει παράγωγος στο $x = 0$.

Γ.2.i)

Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Επιπλέον, $f(0) = 1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

Αφού $f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, δεν πληρούνται οι προϋποθέσεις για το θεώρημα Rolle.

ii)

Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ είναι:

$f'(x) = -\eta\mu(x)$

Άρα

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$

και για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$, τελικά $x = \pi$ ή $\xi = \pi$.

Γ.3.

Για $x < 0$ είναι:

$f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$

Για να είναι η εφαπτόμενη παράλληλη στον $x'x$πρέπει:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 - 6x - 1 = 0$
$\Delta = 36 + 12\alpha = 12(\alpha + 3)$

Αφού $a + 3 < 0$είναι $\Delta < 0$, άρα δεν υπάρχουν ρίζες.

Άρα $f'(x) \neq 0$για $x < 0$και δεν υπάρχει εφαπτόμενη παράλληλη στον $x'x$.

Γ.4.

Α' τρόπος:

Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$είναι:

$f(x) = \sigma\upsilon\nu(x) \geq -1$

ενώ για $x \in (-\infty, 0]$είναι $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$και επειδή $\Delta < 0$ και $\alpha < 0$ θα είναι $f'(x) < 0$για $x < 0$, δηλαδή η fείναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Άρα για $(-\infty, 0]$είναι $f(x) \geq f(0) = 1 \geq -1$.

Τελικά:

$$f(x) \geq -1, \qquad x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Β' τρόπος:

Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$είναι:

$f(x) = \sigma\upsilon\nu(x) \geq -1$

Για $x \in (-\infty, 0]$:

επειδή $x^3 \leq 0$και $a < -3$, είναι $ax^3 \geq -3x^3$. Άρα:

$f(x) \geq -3x^3 - 3x^2 - x + 1 = -x(3x^2 + 3x + 1) + 1$

Επειδή το $3x^2 + 3x + 1$έχει $\Delta = 9 - 12 < 0$ θα είναι $3x^2 + 3x + 1 > 0$για $x \leq 0$.

Άρα για $x \leq 0$θα είναι $-x(3x^2 + 3x + 1) \geq 0$και τελικά:

$f(x) \geq 1 > -1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1.

Έχουμε την $\ln x = \frac{1}{x}$. Θα πρέπει $x > 0$.

Για $0 < x \leq 1$, είναι $\ln x \leq 0$και $\frac{1}{x} > 0$. Άρα δεν έχει ρίζα στο $(0,1]$.

Θεωρούμε την$q: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, με $q(x) = \ln x - \frac{1}{x}$.

Έχουμε:

$$q'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$$

Άρα η q είναι γνησίως αύξουσα και επιπλέον:

$$q(1) = -1 < 0$$
$$q(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0$$

Από Θ. Bolzanoγια την qπου είναι συνεχήςστο $[1, e]$και παραγωγίσιμη στο $(1, e)$, παίρνουμε ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (1, e)$, ενώ επειδή η qείναι μονότονη σε όλο το $(1, +\infty)$η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική.

Δ.2.

Α' τρόπος:

Έχουμε ότι $\ln x_0 = \frac{1}{x_0}$.

Άρα $f(x) = \frac{1}{x_0}(x+1) - \ln x - 1$και

$$f'(x) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x \cdot x_0}$$

Άρα έχουμε τον πίνακα μονοτονίας της f:

x	0 x_0 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	↘ ↗

Οπότε η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = x_0$, το

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}(x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = 1 + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 = 0$$

Β' τρόπος:

Είναι $f(x) = x\ln x_0 + \ln x_0 - \ln x - 1 = \frac{x}{x_0} - \ln\frac{x}{x_0} - 1$

καιπροφανώς $f(x_0) = 0$.

Είναι γνωστό ότι για $x > 0$, ισχύει $\ln x \leq x - 1$ (σχολικό βιβλίο σελ. 148) με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Άρα $\ln\frac{x}{x_0} \leq \frac{x}{x_0} - 1 \Longrightarrow f(x) \geq 0 = f(x_0)$

με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x = x_0$.

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0.

Δ.3.

Α' τρόπος:

Θεωρούμε την εξίσωση

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$$

Για $x \leq 0$το αριστερό μέλος είναι μη-θετικό, ενώ το δεξί μέλος είναι πάντα θετικό. Άρα αν υπάρχει λύση θα βρίσκεται για $x > 0$.

Άρα για $x > 0$:

$$xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln(xe^{-x}) = \ln\left[\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)\ln\frac{x_0}{e} \Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)\ln x_0 - (x+1)\ln e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = \frac{(x+1)}{x_0} - x - 1 \Leftrightarrow \ln x - \frac{x+1}{x_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Όμως από το Δ.2. ερώτημα, γνωρίζουμε ότι η fέχει ολικό ελάχιστο στο $x = x_0$το $f(x_0) = 0$, το οποίο θα είναι και η μοναδική ρίζα της ζητούμενης εξίσωσης.

Άρα $g(x) = h(x) \Leftrightarrow x = x_0$είναι η μοναδική λύση και οι C_g, C_hέχουν μοναδικό κοινό σημείο $\left(x_0, g(x_0)\right) = \left(x_0, h(x_0)\right)$.

Για να έχουν και κοινή εφαπτομένη θα πρέπει επιπλέον $g'(x_0) = h'(x_0)$.

Έχουμε

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$$

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln\frac{x_0}{e}$$

Άρα:

$$g'(x_0) = e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0}$$

$$h'(x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \ln\frac{x_0}{e}$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $g(x_0) = h(x_0) \Rightarrow x_0 e^{-x_0} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}$και ότι $\ln x_0 = \frac{1}{x_0}$.

Τελικά παίρνουμε ότι πράγματι $g'(x_0) = h'(x_0)$και άρα οι δύο συναρτήσεις έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x = x_0$.

Β' τρόπος:

Για $x \leq 0$, ισχύει $g(x) \leq 0$και $h(x) > 0$. Άρα η $g(x) = h(x)$ δεν έχει λύση.

Για $x > 0$, είναι

$$xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln(xe^{-x}) = \ln\left[\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)\ln\frac{x_0}{e} \Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)\ln x_0 - (x+1)\ln e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = \frac{(x+1)}{x_0} - x - 1 \Leftrightarrow \ln x - \frac{x+1}{x_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$$

και επιπλέον:

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = g(x) \cdot \left(-1 + \frac{1}{x}\right)$$
$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln \frac{x_0}{e} = h(x) \ln \frac{x_0}{e} = h(x) \cdot (\ln x_0 - 1)$$

Άρα:

$$g'(x_0) = g(x_0) \cdot \left(-1 + \frac{1}{x_0}\right) = h(x_0)(-1 + \ln x_0) = h'(x_0)$$

Τελικά παίρνουμε ότι πράγματι $g'(x_0) = h'(x_0)$και άρα οι δύο συναρτήσεις έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x = x_0$.

Δ.4.

Επειδή $f(x) > \phi(x)$η απόσταση $A\big(x, f(x)\big), B\big(x, \phi(x)\big)$είναι $d(x) = f(x) - \phi(x)$.

Αφού η απόσταση είναι ελάχιστη στο x_0θα έχουμε $d(x) \geq d(x_0)$για κάθε $x > 0$.

1η περίπτωση: Δεν υπάρχει $\phi'(x_0)$, οπότε το $x = x_0$είναι εξ ορισμού κρίσιμο σημείο (δεν μας λέει αν η ϕείναι παραγωγίσιμη).

2η περίπτωση: Υπάρχει $\phi'(x_0)$. Επειδή η fείναι παραγωγίσιμη, θα είναι παραγωγίσιμη και η απόσταση $d(x)$στο $x = x_0$.

Επιπλέον, αφού η dεμφανίζει ελάχιστο στο x_0από το Θ. Fermatθα είναι $d'(x_0) = 0$.

Άρα:

$$d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \phi'(x_0) \Leftrightarrow \phi'(x_0) = 0$$

Άρα πράγματι το x_0είναι κρίσιμο σημείο της ϕ.