

Τράπεζα Θεμάτων Γεωμετρίας Α' Λυκείου

Θέμα 4

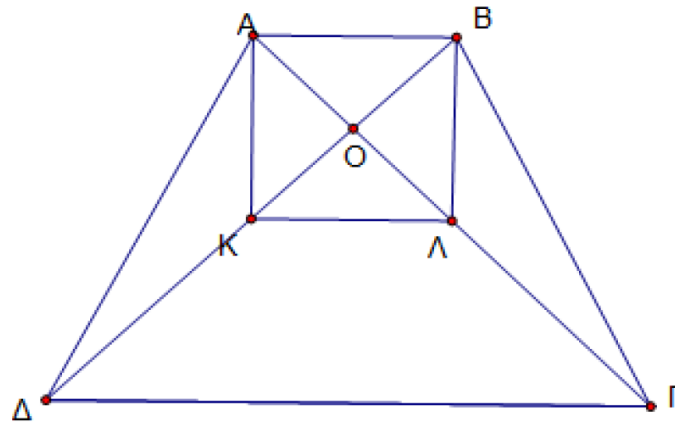
GI_A_GEO_4_4645

Στο παρακάτω τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν: $ΑΔ = ΒΓ$, $ΑΓ = ΒΔ$, και $ΑΒ < ΓΔ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $ΓΔ = 3ΑΒ$ και Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)



Λύση:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ έχουν ΑΒ κοινή, $ΑΓ = ΒΔ$ και $ΒΓ = ΑΔ$. Άρα είναι ίσα οπότε $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1$. Άρα το ΟΑΒ είναι ισοσκελές με $ΟΑ = ΟΒ$. Όμοια τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΔ είναι ίσα διότι έχουν ΔΓ κοινή, $ΑΓ = ΒΔ$ και $ΑΔ = ΒΓ$. Άρα έχουν και την $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$. Δηλαδή το τρίγωνο ΟΔΓ είναι ισοσκελές με $ΟΔ = ΟΓ$.

β) Επειδή τα ισοσκελή τρίγωνα έχουν τη γωνία της κορυφής ίδια συνάγεται ότι οι γωνίες παρά τη βάση θα έχουν ίσα αθροίσματα. Δηλαδή $2\hat{B}_1 = 2\hat{\Delta}_2 \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{\Delta}_2$ που σημαίνει ότι $ΑΒ \parallel ΔΓ$ και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

γ) Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων ενός τραpezίου είναι ίσο με τη μέση διαφορά των δύο βάσεων, δηλαδή $ΚΛ \parallel = \frac{\Delta\Gamma - ΑΒ}{2}$ ή επειδή $\Gamma\Delta = 3ΑΒ$ έχουμε $ΚΛ = \frac{3ΑΒ - ΑΒ}{2} = ΑΒ$. Οπότε το ΑΚΛΒ είναι

παραλληλόγραμμο και επειδή $KB = \frac{B\Delta}{2} = A\Delta = \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow KB = A\Lambda$, το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

Ευχαριστούμε για την επίλυση τον αγαπητό, από τα παλιά, δάσκαλο Πολύωρο Γεωργιακάκη.