Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Α' Λυκείου

Θέμα 4 **GI_A_GEO_4_4579**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α (Δ, Ε σημεία της ευθείας ΒΓ). Φέρουμε ΒΖ κάθετη στην ΑΔ και ΒΗ κάθετη στην ΑΕ και θεωρούμε Μ το μέσο του ΔΓ.

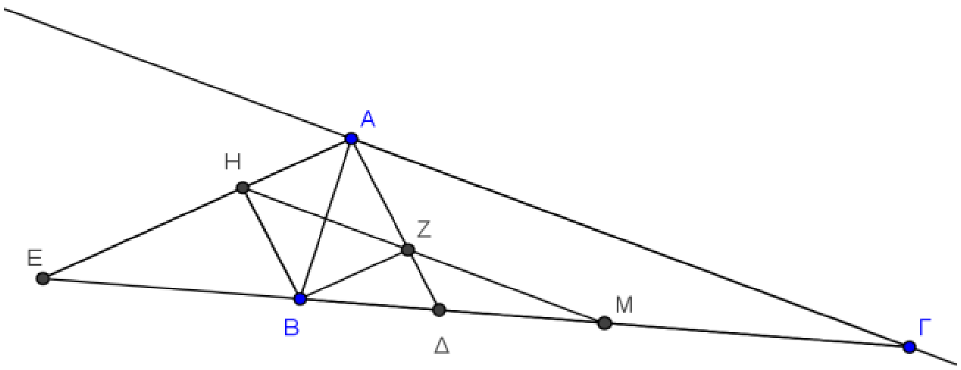
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΖΒΗ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

β) Η γωνία ΗΖΑ είναι ίση με τη γωνία ΖΑΓ. (Μονάδες 6)

γ) Η ευθεία ΗΖ διέρχεται από το Μ. (Μονάδες 6)

δ) $\mathrm{MH} = \dfrac{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}}{2}$. (Μονάδες 8)



Λύση:

α) Η γωνία $\mathrm{H}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = 90^o$ γιατί είναι γωνία των διχοτόμων δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών οπότε $\mathrm{HA} \perp \mathrm{AZ}, \mathrm{BZ} \perp \mathrm{AZ}$ άρα $\mathrm{HA}//\mathrm{BZ}$

Όμοια $\mathrm{BH} \perp \mathrm{AE}, \mathrm{ZA} \perp \mathrm{AE}$ άρα $\mathrm{BH}//\mathrm{ZA}$. Συνεπώς το ΗΒΖΑ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή έχει και μια γωνία ορθή είναι ορθογώνιο.

β) Η $\mathrm{H}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} = \hat{\mathrm{A}}_1$, γιατί το ΗΒΖΑ είναι ορθογώνιο. $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2$ γιατί ΑΔ διχοτόμος άρα

$\mathrm{H}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

γ) Από το (β) ερώτημα συνεπάγεται ότι $\mathrm{HZ}//\mathrm{A\Gamma}$.
Ενώνουμε λοιπόν το Η με το Ζ και το Ζ με το Μ και αρκεί να δείξουμε ότι οι γωνίες

$\mathrm{H\hat{Z}B} + \mathrm{B\hat{Z}\Delta} + \mathrm{\Delta\hat{Z}M} = 180^o$.

Η $\mathrm{H\hat{Z}\Delta} = \hat{\mathrm{A}}_2$ εντός εκτός και επί τα αυτά των ΖΜ και ΑΓ που τέμνονται από την ΑΔ.

Η $\hat{\mathrm{A}}_2 = \hat{\mathrm{A}}_1$ διότι ΑΔ διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου.

Η $\mathrm{H\hat{A}B} = \mathrm{H\hat{Z}B}$ λόγω του ορθογωνίου ΑΗΒΖ. Οπότε έχουμε $\mathrm{H\hat{A}B} + 90^o + \hat{\mathrm{A}}_1 = 180^o$ ή

$\mathrm{H\hat{A}B} + \hat{\mathrm{A}}_1 = 90^o$ που είναι αληθινό γιατί η γωνία των διχοτόμων δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι 90^o.

<u>Ευχαριστούμε για την επίλυση τον αγαπητό, από τα παλιά, δάσκαλο Πολύδωρο Γεωργιακάκη</u>.