

Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Α' Λυκείου

Θέμα 4

GI_A_GEO_4_3954

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΔΕ = ΔΓ ενώ στην προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B}\hat{\Gamma}Z = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E$. (Μονάδες 10)

ii. τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

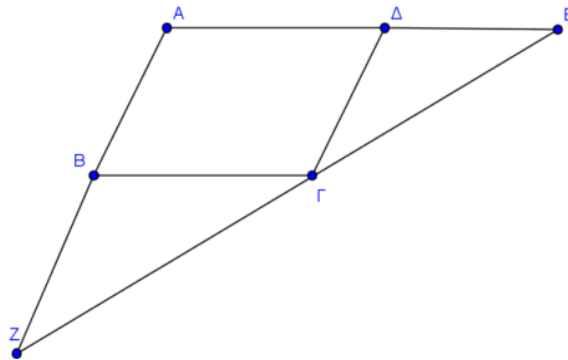
β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό. « Έχουμε:

$\hat{B}\hat{\Gamma}Z = \hat{\Delta}\hat{E}\hat{\Gamma}$ (ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΖΕ) και

$\hat{B}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}E$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ).

Όμως $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}E + \hat{\Gamma}\hat{\Delta}E + \hat{\Delta}\hat{E}\hat{\Gamma} = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα: $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}E + \hat{B}\hat{\Gamma}\Delta + \hat{B}\hat{\Gamma}Z = 180^\circ$. Οπότε τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό. (Μονάδες 5)

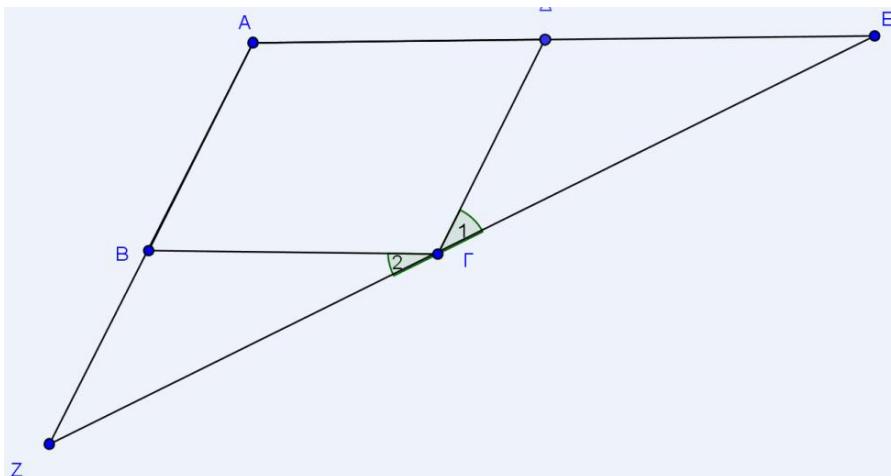


Λύση:

α) i) Επειδή $AE = AΓ \Rightarrow \hat{E} = \hat{\Gamma}_1$ όμοια επειδή $BZ = BΓ \Rightarrow \hat{Z} = \hat{\Gamma}_2$. Επομένως από το τρίγωνο ΔΓΕ η $\hat{\Delta}_{εξ} = 2\hat{E}$ και από το τρίγωνο ΒΓΖ η $\hat{B}_{εξ} = 2\hat{Z}$ επειδή η $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Delta}_{εξ}$ έπεται ότι $2\hat{E} = 2\hat{Z}$ ή $\hat{\Gamma}_2 = \hat{E}$

ii) Επειδή $\hat{\Gamma} \hat{\Delta} \hat{E} + \hat{E} + \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ$ και $B\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} \hat{\Delta} \hat{E}, \hat{E} = \hat{\Gamma}_2$ οπότε $B\hat{\Gamma}\hat{\Delta} + \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ$. Δηλαδή τα σημεία Ζ,Γ,Ε, είναι συνευθειακά.

β) Το λάθος είναι στο σημείο που έδειξε ο μαθητής ότι $B\hat{\Gamma}\hat{Z} = \hat{\Delta}\hat{E}\hat{\Gamma}$ που θεώρησε ότι οι παράλληλες ΔΕ και ΒΓ τέμνονται από την ευθεία ΖΕ. Όμως δεν ξέρουμε αν η ΖΕ είναι ευθεία.



Ευχαριστούμε για την επίλυση τον αγαπητό, από τα παλιά, δάσκαλο Πολύδρο Γεωργιακάκη.