

Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Α' Λυκείου

Θέμα 4

GI_A_GEO_4_3796

Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, $BE \perp \Gamma Z$, τα ύψη από τις κορυφές B, Γ αντίστοιχα και H το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα M, N, K, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων $AB, A\Gamma, \Gamma H, BH$ αντίστοιχα.

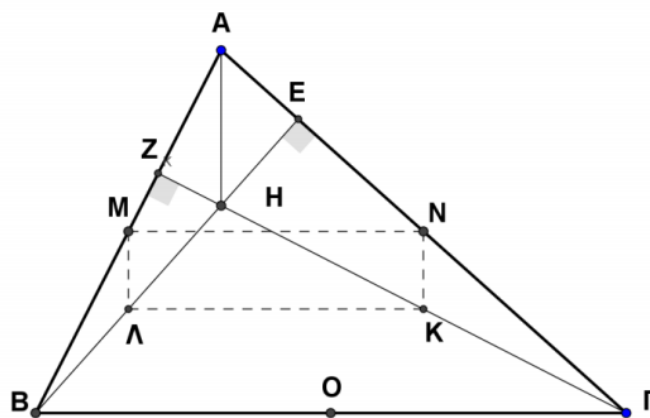
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $MN = \Lambda K$ (Μονάδες 6)

ii. $NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}$ (Μονάδες 6)

iii. Το τετράπλευρο $MNKL$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Αν το O είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το $\hat{MOK} = 90^\circ$. (Μονάδες 7)



Λύση:

α) Η MN ενώνει τα μισά των πλευρών AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ άρα $MN \parallel \frac{B\Gamma}{2}$ (1)

Όμοια η ΛΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΗ και ΓΗ του τριγώνου ΒΗΓ επομένως

$$ΛΚ // = \frac{ΒΓ}{2} \quad (2) . \text{ Από (1) και (2) έπεται } ΜΝ=ΛΚ.$$

β) Από το τρίγωνο ΑΓΗ η ΝΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΖ και ΓΗ επομένως

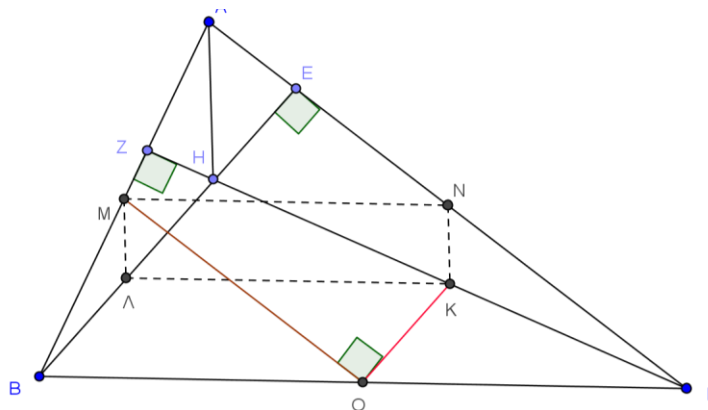
$$ΝΚ // = \frac{ΑΗ}{2} \quad (3) .$$

Όμοια από το τρίγωνο ΑΗΒ η ΜΛ ενώνει τα μέσα των ΑΒ και ΗΒ, άρα $ΜΛ // = \frac{ΑΗ}{2}$ (4)

Από (3) και (4) έπεται ότι $ΜΛ = ΝΚ = \frac{ΑΗ}{2}$.

γ) Επειδή $ΜΝ // ΠΚ // ΒΓ$ και $ΜΛ // ΑΗ$ που η $ΑΗ \perp ΒΓ$ διότι το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ συνεπάγεται ότι και $ΜΛ \perp ΛΚ$ επομένως το ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

δ) Η $ΜΟ // ΑΓ$ επομένως $ΜΟ \perp ΒΕ$ η $ΟΚ // ΒΕ$ οπότε $ΟΚ \perp ΟΜ$ και η γωνία $ΜΟΚ = 90^\circ$.



Ευχαριστούμε για την επίλυση τον αγαπητό, από τα παλιά, δάσκαλο Πολύδρο Γεωργιακάκη.