Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Α’ Λυκείου

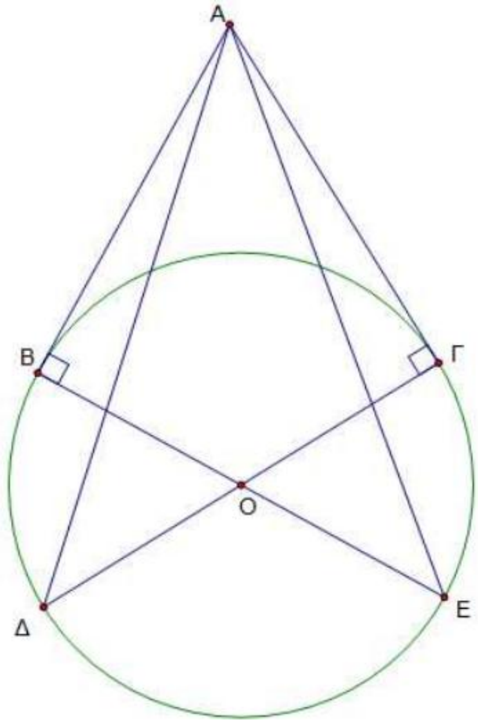
Θέμα 2 **GI_A_GEO_2_5647**

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Από σημείο Α εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Τα σημεία Ε και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των Β και Γ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



Λύση:

α) Παρατηρούμε πως: ΔΓ=ΒΕ=2ρ
Φέρνουμε την ΟΑ.

Συγκρίνουμε τα $\overset{\Delta}{\mathrm{ABO}}$, $\overset{\Delta}{\mathrm{O\Gamma A}}$:
Έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} \quad (1) \\ \mathrm{OB=O\Gamma}=\rho \\ \mathrm{OA}\ \text{κοινή} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{\mathrm{ABO}} = \overset{\Delta}{\mathrm{O\Gamma A}}$$, διότι έχουν πλευρές ίσες μια προς μια και την αντίστοιχη γωνία ίση. Άρα $\mathrm{BA=\Gamma A} \quad (2)$.

Συγκρίνουμε τα $\overset{\Delta}{\mathrm{EBA}}$, $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma\Delta}}$:
Έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 90^o \\ \mathrm{\Delta\Gamma=BE}=2\rho \\ (2) \Rightarrow \mathrm{BA} = \Gamma\mathrm{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{\mathrm{EBA}} = \overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma\Delta}}$$ διότι έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την αντίστοιχη γωνία ίση.

β) Συγκρίνουμε τα $\overset{\Delta}{\mathrm{BO\Delta}}$, $\overset{\Delta}{\mathrm{\Gamma OE}}$:
Έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{OB=O\Delta=O\Gamma=OE}=\rho \\ \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Delta=\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E}\ (\text{ως κατακορυφήν}) \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{\mathrm{BO\Delta}} = \overset{\Delta}{\mathrm{\Gamma OE}}$$, διότι έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση, άρα ΒΔ=ΓΕ . Όμως $\overset{\Delta}{\mathrm{OB\Delta}} = \overset{\Delta}{\mathrm{\Gamma OE}}$ ισοσκελή, άρα

$$\mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{O} = \mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{E} = \Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O} \qquad (3)$$

Άρα $E\hat{\Gamma}A = O\hat{\Gamma}A + O\hat{\Gamma}E$

$E\hat{B}\Delta = O\hat{B}A + O\hat{B}\Delta \overset{(1),\ (3)}{=} O\hat{\Gamma}A + O\hat{\Gamma}E$

Άρα $\overset{\triangle}{E\Gamma A} = \overset{\triangle}{EBA}$

Άρα $\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{A\Gamma E}$, διότι :

- $A\hat{\Gamma}E = A\hat{B}\Delta$
- $AB = A\Gamma$
- $B\Delta = \Gamma E$

<u>Επιμέλεια:</u> Βασίλης Γκιμίσης- Μαθηματικός