

Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Α' Λυκείου

Θέμα 2

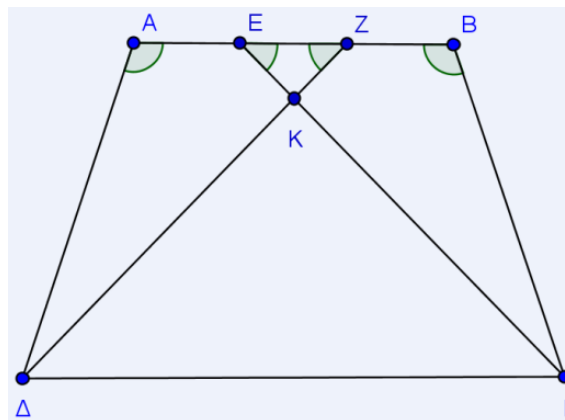
GI_A_GEO_2_5007

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ πάνω στην ΑΒ έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω Κ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta Z = \Gamma E$ (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΕΚΖ και ΔΚΓ είναι ισοσκελή (Μονάδες 12)

Λύση:



α) Συγκρίνω τα $\hat{\Delta}\hat{\Delta}Z$, $\hat{B}\hat{\Gamma}E$, έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} AZ = EB = \frac{2}{3} AB \\ A\Delta = B\Gamma \text{ (ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο)} \\ \hat{\Delta}\hat{A}B = \hat{A}B\hat{\Gamma} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Delta}\hat{\Delta}Z = \hat{B}\hat{\Gamma}E, \text{ οπότε } E\Gamma = \Delta Z.$$

β) Προκύπτει ότι $\hat{A}\hat{D}\hat{Z} = \hat{E}\hat{\Gamma}\hat{B}$, οπότε $\hat{Z}\hat{E}\hat{K} = \hat{E}\hat{Z}\hat{K}$.

Άρα το $\hat{E}\hat{K}\hat{Z}$ ισοσκελές.

$\hat{A}\hat{D}\hat{K} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{K}$ και επιπλέον $\hat{A}\hat{D}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$, οπότε:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{K} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} - \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{K} = \hat{A}\hat{D}\hat{\Gamma} - \hat{A}\hat{D}\hat{K} \\ \hat{K}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{D}\hat{\Gamma} - \hat{A}\hat{D}\hat{K} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{K}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{K} . \text{ Άρα το } \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{K} \text{ ισοσκελές.}$$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης - Μαθηματικός