ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να γραφούν υπό μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων τα σύνολα:

i) $A = \left\{ x \mid \frac{1}{x} \le 1 \right\}$ **ii)** $A = \left\{ x \mid \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < 1 \right\}$.

ΛΥΣΗ

i) Είναι

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \le 1 &\Leftrightarrow 0 \le 1 - \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow 0 \le \frac{x-1}{x} \\ &\Leftrightarrow x(x-1) \ge 0 \quad \text{και} \quad x \ne 0 \\ &\Leftrightarrow x < 0 \quad \text{ή} \quad x \ge 1. \end{aligned}$$

Άρα $A = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$.

ii) Είναι

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < 1 &\Leftrightarrow -1 < \frac{1}{x} - 2 < 1 \\ &\Leftrightarrow 1 < \frac{1}{x} < 3 \\ &\Leftrightarrow 1 > x > \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Άρα $A = \left(\frac{1}{3}, 1 \right)$.

1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης είναι γνωστή από προηγούμενες τάξεις. Στην παράγραφο αυτή υπενθυμίζουμε τον ορισμό της πραγματικής συνάρτησης με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, επαναλαμβάνουμε γνωστές έννοιες και τέλος ορίζουμε πράξεις μεταξύ των πραγματικών συναρτήσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(x)}$.

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x).$$

— Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

— Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με $\boldsymbol{D_f}$.

— Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(A)}$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \quad \text{για κάποιο} \quad x \in A\}.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στα επόμενα και σε όλη την έκταση του βιβλίου :

— Θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

— Όταν θα λέμε ότι **"Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο B"**, θα εννοούμε ότι το B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Στην περίπτωση αυτή με $f(B)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των τιμών της f σε κάθε $x \in B$. Είναι δηλαδή:

$$f(B) = \{y \mid y = f(x) \quad \text{για κάποιο} \quad x \in B\}.$$

Συντομογραφία συνάρτησης

Είδαμε παραπάνω ότι για να οριστεί μια συνάρτηση, f αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία:

- το πεδίο ορισμού της και
- η τιμή της, $f(x)$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Συνήθως, όμως, αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνο τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$. Σε μια τέτοια περίπτωση θα *θεωρούμε συμβατικά* ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x, για τους οποίους το $f(x)$ έχει νόημα. Έτσι, για παράδειγμα, αντί να λέμε "δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,2]\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\sqrt{4-2x}$" θα λέμε "δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{4-2x}$" ή, πιο απλά, "δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4-2x}$", ή "δίνεται η συνάρτηση $y=\sqrt{4-2x}$".

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο:

i) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}$ **ii)** $f(x)=\sqrt{1-\ln x}$

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση f ορίζεται, όταν και μόνο όταν

$$x^2-3x+2\geq 0 \quad \text{και} \quad x\neq 0.$$

Το τριώνυμο όμως x^2-3x+2 έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 2. Έτσι, η ανίσωση $x^2-3x+2\geq 0$ αληθεύει, όταν και μόνο όταν

$$x\leq 1 \quad \text{ή} \quad x\geq 2.$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A=(-\infty,0)\cup(0,1]\cup[2,+\infty)$.

ii) Η συνάρτηση f ορίζεται, όταν και μόνο όταν

$$1-\ln x\geq 0.$$

Είναι όμως

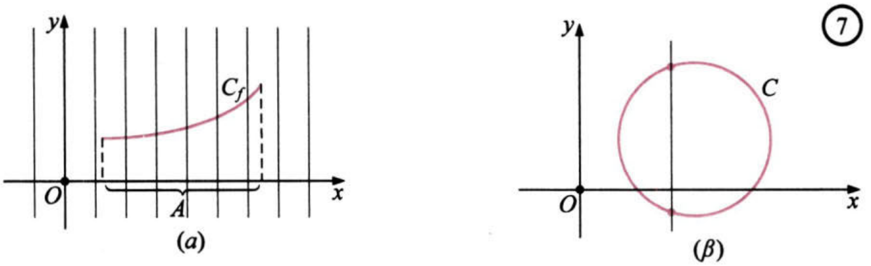
$$\begin{aligned} 1-\ln x\geq 0 &\Leftrightarrow \ln x\leq 1 \\ &\Leftrightarrow \ln x\leq \ln e \\ &\Leftrightarrow 0<x\leq e. \end{aligned}$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A=(0,e]$.

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y=f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x,f(x))$, $x\in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f. Η εξίσωση, λοιπόν, $y=f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η $y=f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. 7α).
Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. 7β).

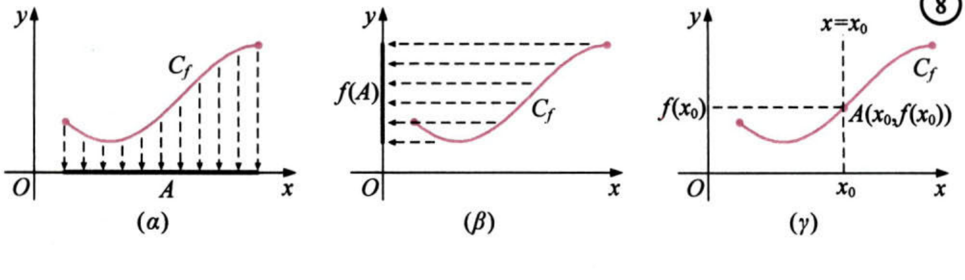


΄Οταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f.

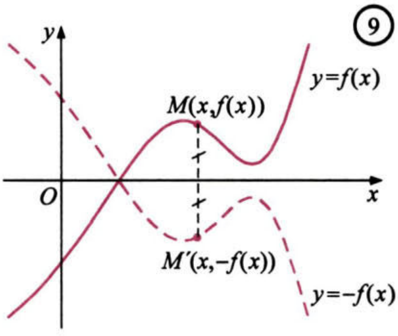
β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.

γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x=x_0$ και της C_f (Σχ. 8).

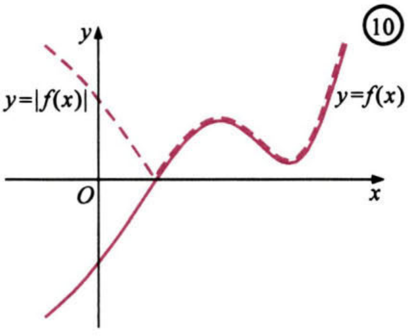


Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f, μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$.

α) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x,-f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. (Σχ. 9).



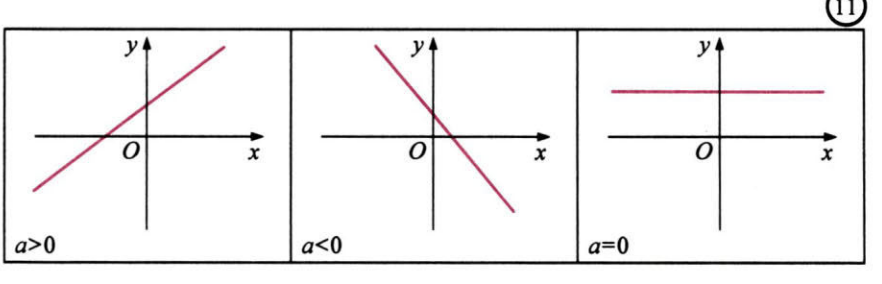
β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).



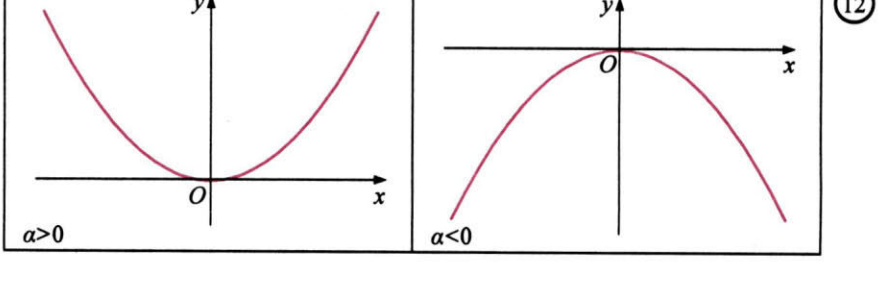
Μερικές βασικές συναρτήσεις

Στην παράγραφο αυτή δίνουμε τις γραφικές παραστάσεις μερικών βασικών συναρτήσεων, τις οποίες γνωρίσαμε σε προηγούμενες τάξεις.

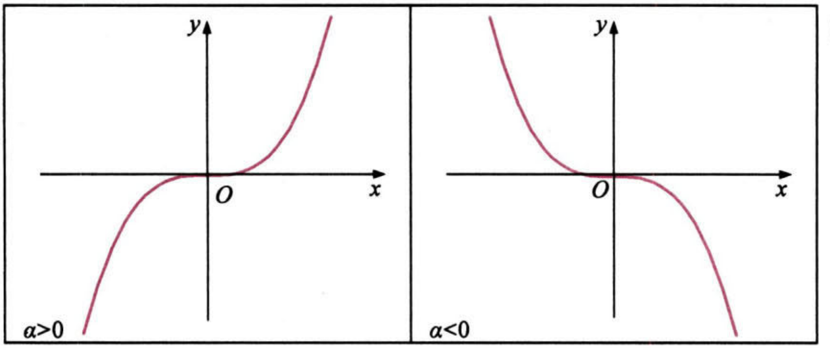
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$



Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.

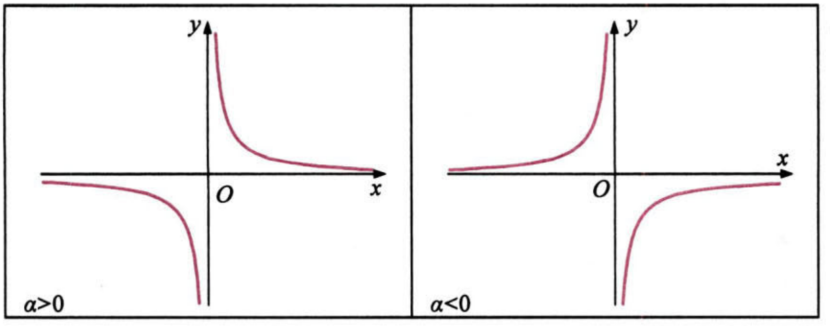


Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3$, $\alpha \neq 0$.



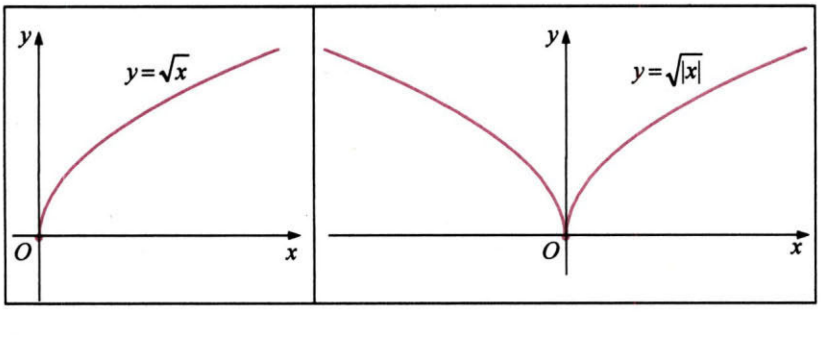
13

Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$.



14

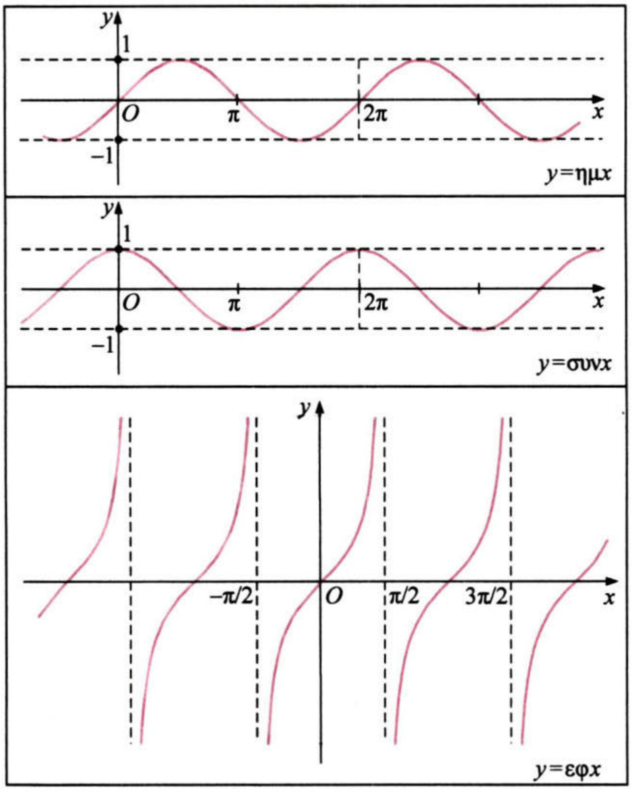
Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{|x|}$.



15

Επειδή $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$, η γραφική παράσταση της $y = \sqrt{|x|}$ αποτελείται απο δύο κλάδους. Ο ένας είναι η γραφική παράσταση της $y = \sqrt{x}$ και ο άλλος η συμμετρική της ως προς τον άξονα $y'y$.

Οι τριγωνικές συναρτήσεις : $f(x)=\eta\mu x$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f(x)=\varepsilon\varphi x$



16

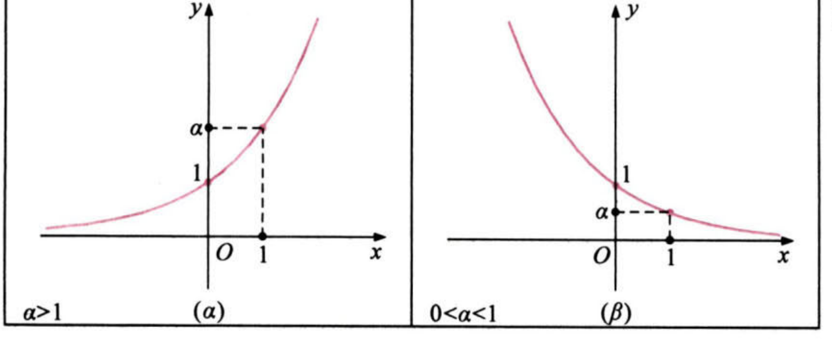
(α)

(β)

(γ)

Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο $T=2\pi$, ενώ η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T=\pi$.

Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$.



17

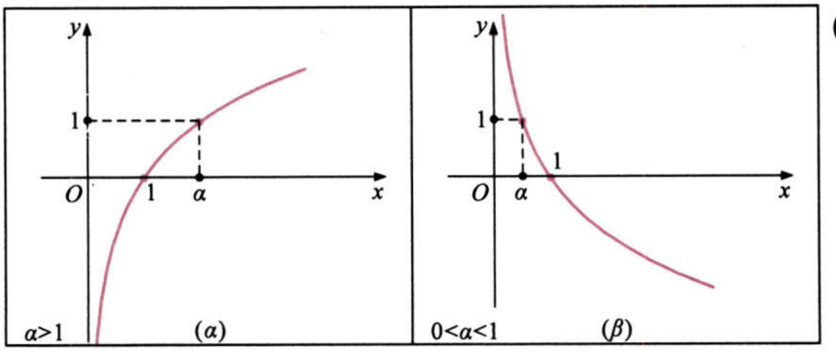
Υπενθυμίζουμε ότι:

αν $\alpha > 1$, **τότε:** $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

ενώ

αν $0 < \alpha < 1$, **τότε:** $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$



(18)

Υπενθυμίζουμε ότι:

1) $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$

2) $\log_\alpha \alpha^x = x$ **και** $\alpha^{\log_\alpha x} = x$

3) $\log_\alpha \alpha = 1$ **και** $\log_\alpha 1 = 0$

4) $\log_\alpha (x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

5) $\log_\alpha \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$

6) $\log_\alpha x_1^k = \kappa \log_\alpha x_1$

7) **αν** $\alpha > 1$, **τότε:** $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

ενώ

αν $0 < \alpha < 1$, **τότε :** $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

8) $\alpha^x = e^{x\ln\alpha}$, **αφού** $\alpha = e^{\ln\alpha}$.

Οι παραπάνω τύποι ισχύουν με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.
Με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων μπορούμε να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων, όπως στην παρακάτω εφαρμογή.

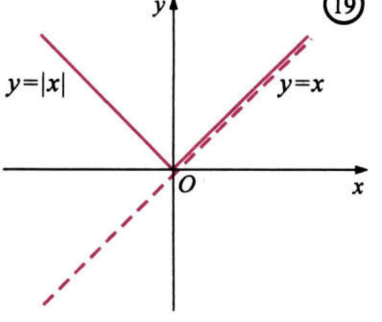
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να παραστήσετε γραφικά κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις:

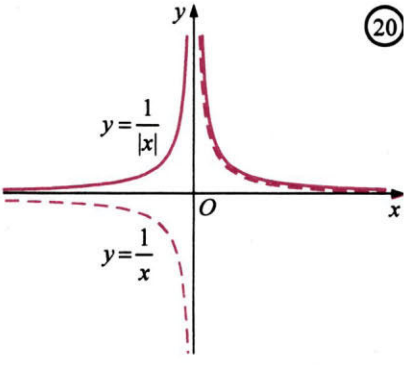
i) $f(x)=|x|$, **ii)** $g(x)=\dfrac{1}{|x|}$, **iii)** $h(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$.

ΛΥΣΗ

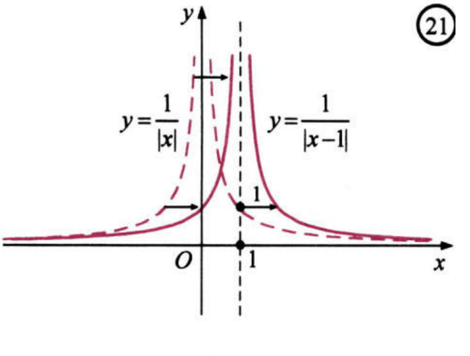
i) Αρχικά παριστάνουμε γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x)=x$ και έπειτα την $f(x)=|\varphi(x)|$.



ii) Αρχικά παριστάνουμε γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ και έπειτα την $g(x)=|\varphi(x)|$.



iii) Επειδή $h(x)=g(x-1)$,η γραφική παράσταση της h προκύπτει, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της g κατά μία μονάδα προς τα δεξιά.



Ισότητα συναρτήσεων

Έστω οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1} \quad \text{και} \quad g(x)=x\,.$$

Παρατηρούμε ότι:

– οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\mathbb{R}$ και

– για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$, αφού

$$f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)}{x^2+1}=x=g(x)\,.$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Γενικά:

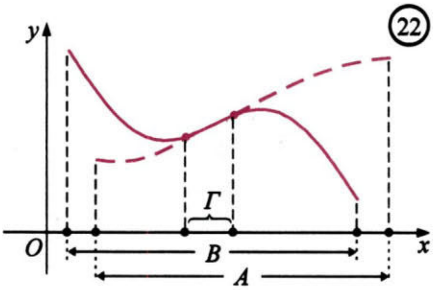
ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f=g$.

Έστω τώρα f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B. Αν για κάθε $x\in\Gamma$ ισχύει $f(x)=g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις **f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ**. (Σχ. 22)



Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x^2+x}{x},$$

που έχουν πεδία ορισμού τα σύνολα $A=\mathbb{R}-\{1\}$ και $B=\mathbb{R}-\{0\}$ αντιστοίχως, είναι ίσες στο σύνολο $\Gamma=\mathbb{R}-\{0,1\}$, αφού για κάθε $x\in\Gamma$ ισχύει

$$f(x)=g(x)=x+1\,.$$

Πράξεις με συναρτήσεις

Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=\sqrt{1-x}\,,\qquad g(x)=\sqrt{x}$$

και οι

$$\varphi_1(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\,,\quad \varphi_2(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\,,\quad \varphi_3(x)=\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}\,,\quad \varphi_4(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,.$$

Παρατηρούμε ότι:

α) Το πεδίο ορισμού των φ_1,φ_2 και φ_3 είναι το σύνολο $[0,1]$, που είναι η τομή των πεδίων ορισμού $A=(-\infty,1]$ και $B=[0,+\infty)$ των f, g, ενώ το πεδίο ορισμού της φ_4 είναι το σύνολο $(0,1]$, που είναι η τομή των A, B αν εξαιρέσουμε τα x για τα οποία ισχύει $g(x)=0$, και

β) $\varphi_1(x)=f(x)+g(x)$, $\varphi_2(x)=f(x)-g(x)$, $\varphi_3(x)=f(x)\cdot g(x)$, $\varphi_4(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Τις συναρτήσεις $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ και φ_4 τις λέμε άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και πηλίκο αντιστοίχως των f,g. Γενικά:

Ορίζουμε ως **άθροισμα** $\boldsymbol{f+g}$, **διαφορά** $\boldsymbol{f-g}$, **γινόμενο** $\boldsymbol{fg}$ και **πηλίκο** $\boldsymbol{\dfrac{f}{g}}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A\cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\dfrac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο

$$\{x \mid x\in A \quad \text{και} \quad x\in B, \quad \text{με} \quad g(x)\neq 0\}.$$

Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\sqrt{x-1}$. Η τιμή της φ στο x μπορεί να οριστεί σε δύο φάσεις ως εξής:

α) Στο $x\in\mathbb{R}$ αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $y=x-1$ και στη συνέχεια

β) στο $y=x-1$ αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $\sqrt{y}=\sqrt{x-1}$, εφόσον $y=x-1\geq 0$.

23

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & y=x-1 \arrow[r, "g"] & \sqrt{y}=\sqrt{x-1} \end{tikzcd}$$

Στη διαδικασία αυτή εμφανίζονται δύο συναρτήσεις:

α) η $f(x)=x-1$, που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\mathbb{R}$ *(α΄ φάση)* και β) η $g(y)=\sqrt{y}$, που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $B=[0,+\infty)$ *(β΄ φάση)*.

Έτσι, η τιμή της φ στο x γράφεται τελικά

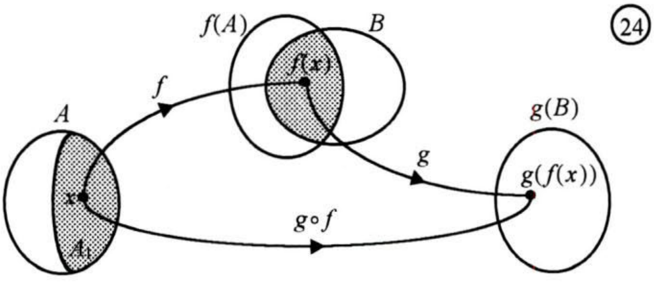
$$\varphi(x)=g(f(x)).$$

Η συνάρτηση φ λέγεται *σύνθεση της f με την g* και συμβολίζεται με $\boldsymbol{gof}$.
Το πεδίο ορισμού της φ δεν είναι ολόκληρο το πεδίο ορισμού A της f, αλλά περιορίζεται στα $x\in A$ για τα οποία η τιμή $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού B της g, δηλαδή είναι το σύνολο $A_1=[1,+\infty)$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g**, και τη συμβολίζουμε με $\boldsymbol{gof}$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x)=g(f(x)).$$



Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1=\{x\in A \mid f(x)\in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1\neq\varnothing$, δηλαδή αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στη συνέχεια και σε όλη την έκταση του βιβλίου, θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που οι συνθέσεις τους έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\sqrt{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i) $\boldsymbol{gof}$ **ii)** $\boldsymbol{fog}$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = (0,+\infty)$, ενώ η g το $D_g = [0.+\infty)$.

i) Για να ορίζεται η παράσταση $g(f(x))$ πρέπει:

$$x \in D_f \quad \text{και} \quad f(x) \in D_g \tag{1}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1,$$

δηλαδή πρέπει $x \geq 1$. Επομένως, ορίζεται η gof και είναι

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{\ln x}, \quad \text{για κάθε} \quad x \in [1+\infty).$$

ii) Για να ορίζεται η παράσταση $f(g(x))$ πρέπει:

$$x \in D_g \quad \text{και} \quad g(x) \in D_f$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0,$$

δηλαδή πρέπει $x > 0$. Επομένως,ορίζεται η fog και είναι

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \ln\sqrt{x}, \quad \text{για κάθε} \quad x \in (0+\infty).$$

ΣΧΟΛΙΑ

- Στην παραπάνω εφαρμογή παρατηρούμε ότι $gof \neq fog$. Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog, τότε αυτές *δεν είναι υποχρεωτικά* ίσες.

- Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει

$$ho(gof) = (hog)of.$$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $hogof$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων;

i) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$, ii) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{2-x}$

iii) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ iv) $f(x)=\ln(1-e^x)$

2. Για ποιές τιμές του $x\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν:

i) $f(x)=x^2-4x+3$, ii) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, iii) $f(x)=e^x-1$.

3. Για ποιές τιμές του $x\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, όταν:

i) $f(x)=x^3+2x+1$ και $g(x)=x+1$

ii) $f(x)=x^3+x-2$ και $g(x)=x^2+x-2$.

4. Οι ανθρωπολόγοι εκτιμούν οτι το ύψος του ανθρώπου δίνεται από τις συναρτήσεις:

$A(x)=2{,}89x+70{,}64$ (για τους άνδρες) και

$\Gamma(x)=2{,}75x+71{,}48$ (για τις γυναίκες)

όπου x σε εκατοστά, το μήκος του βραχίονα. Σε μία ανασκαφή βρέθηκε ένα οστό από βραχίονα μήκους 0,45 m.

α) Αν προέρχεται από άνδρα ποιο ήταν το ύψος του;

β) Αν προέρχεται από γυναίκα ποιο ήταν το ύψος της;

5. Σύρμα μήκους $\ell=20$ cm κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x cm και $(20-x)$ cm. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του x.

6. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

i) $f(x)=\frac{|x|}{x}+1$, ii) $f(x)=x|x|$,

iii) $f(x)=\begin{cases}-x+3, & x<1\\ x+1, & x\geq 1\end{cases}$ iv) $f(x)=|\ln x|$.

Και από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο των τιμών της f σε καθεμιά περίπτωση.

7. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f=g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f\neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x)=g(x)$.

i) $f(x)=\sqrt{x^2}$ και $g(x)=(\sqrt{x})^2$

ii) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+|x|}$ και $g(x)=1-\frac{1}{|x|}$

iii) $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ και $g(x)=\sqrt{x}+1$.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=1+\frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x}{1-x}.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, fg και $\frac{f}{g}$.

9. Ομοίως για τις συναρτήσεις

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{και} \quad g(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

10. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση gof, αν

i) $f(x)=x^2$ και $g(x)=\sqrt{x}$, ii) $f(x)=\text{ημ}x$ και $g(x)=\sqrt{1-x^2}$

iii) $f(x)=\frac{\pi}{4}$ και $g(x)=\text{εφ}x$.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=\sqrt{x-2}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις gof και fog.

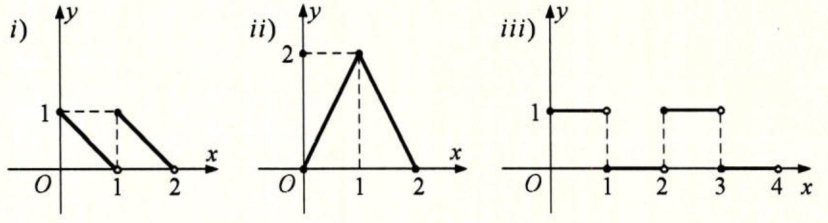
12. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων, αν

i) $f(x)=\eta\mu(x^2+1)$, ii) $f(x)=2\eta\mu^2 3x+1$

iii) $f(x)=\ln(e^{2x}-1)$, iv) $f(x)=\eta\mu^2(3x)$.

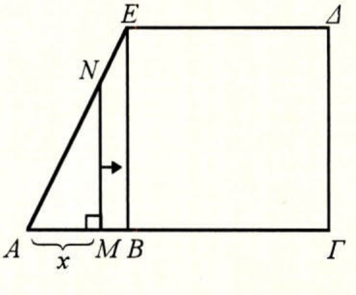
Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι:

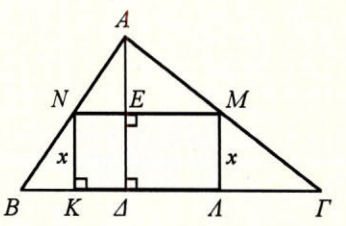


2. Ένα κουτί κυλινδρικού σχήματος έχει ακτίνα βάσης x cm και όγκο 628 cm^3. Το υλικό των βάσεων κοστίζει 4 λεπτά του ευρώ ανά cm^2, ενώ το υλικό της κυλινδρικής επιφάνειας 1,25 λεπτά του ευρώ ανά cm^2. Να εκφράσετε το συνολικό κόστος ως συνάρτηση του x. Πόσο κοστίζει ένα κουτί με ακτίνα βάσης 5 cm;

3. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB=1$, $A\Gamma=3$ και $\Gamma\Delta=2$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του $x=AM$, όταν το M διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$.



4. Ένα ορθογώνιο $K\Lambda MN$ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ βάσης $B\Gamma=10\,\text{cm}$ και ύψους $A\Delta=5\,\text{cm}$. Να εκφράσετε το εμβαδό E και την περίμετρο P του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.



5. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

i) $f(x)=\dfrac{|x+1|+|x-1|}{2}$, ii) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x+|\eta\mu x|}{2}$, $x\in[0,2\pi]$.

Από τη γραφική παράσταση της f να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της σε καθεμιά περίπτωση.

6. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει:

i) $(fog)(x) = x^2 + 2x + 2$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, αν $g(x) = x + 1$

ii) $(fog)(x) = \sqrt{1 + x^2}$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, αν $g(x) = -x^2$.

iii) $(gof)(x) = |\,\text{συν}x\,|$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, αν $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + 1$ και $g(x) = \alpha x + 2$. Για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $fog = gof$.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha}, \quad \text{με} \quad \beta \neq -\alpha^2 \quad \text{και} \quad g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1.$$

Να αποδείξετε ότι

α) $f(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$ και

β) $g(g(x)) = x$, για κάθε $x \in [0,1]$.

9. Οι πολεοδόμοι μιας πόλης εκτιμούν ότι, όταν ο πληθυσμός P της πόλης είναι x εκατοντάδες χιλιάδες άτομα, θα υπάρχουν στην πόλη $N = 10\sqrt{2(x^2 + x)}$ χιλιάδες αυτοκίνητα. Έρευνες δείχνουν ότι σε t έτη από σήμερα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι $\sqrt{t} + 4$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα.

i) Να εκφράσετε τον αριθμό N των αυτοκινήτων της πόλης ως συνάρτηση του t.

ii) Πότε θα υπάρχουν στην πόλη 120 χιλιάδες αυτοκίνητα.;

1.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μονοτονία συνάρτησης

• Οι έννοιες "γνησίως αύξουσα συνάρτηση", "γνησίως φθίνουσα συνάρτηση" είναι γνωστές από προηγούμενη τάξη. Συγκεκριμένα, μάθαμε ότι: