Β΄ ΜΕΡΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

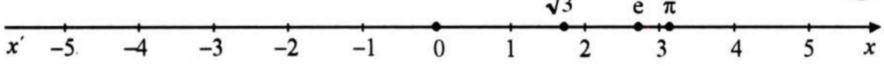
1 ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1.1 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνεται με τα σημεία ενός άξονα, *του άξονα των πραγματικών αριθμών*. (Σχ. 1)

1



Ρητοί αριθμοί λέγονται οι αριθμοί που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$. Είναι, δηλαδή,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \middle| \alpha, \beta \text{ ακέραιοι με } \beta \neq 0 \right\}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο των ακέραιων αριθμών είναι το

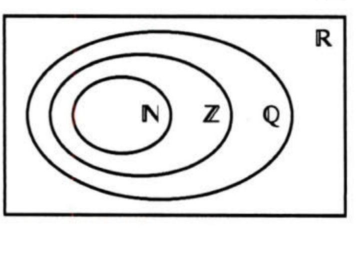
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

ενώ το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Για τα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ ισχύει:

2



$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Τα σύνολα $\mathbb{N} - \{0\}$, $\mathbb{Z} - \{0\}, \mathbb{Q} - \{0\}$ και $\mathbb{R} - \{0\}$ τα συμβολίζουμε συντομότερα με $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$ και $\mathbb{R}^*$ αντιστοίχως.

Πράξεις και διάταξη στο $\mathbb{R}$

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίστηκαν οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και με τη βοήθειά τους η αφαίρεση και η διαίρεση. Οι ιδιότητες των πράξεων αυτών είναι γνωστές από προηγούμενες τάξεις. Στη συνέχεια ορίστηκε η έννοια της διάταξης, οι σπουδαιότερες ιδιότητες της οποίας είναι οι:

1) Αν $\alpha \geq \beta$ και $\beta \geq \gamma$, τότε $\alpha \geq \gamma$

2) $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$

3) $\begin{cases} \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma \geq \beta\gamma & , \text{ όταν } \gamma > 0 \\ \text{ενώ} & \\ \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma \leq \beta\gamma & , \text{ όταν } \gamma < 0 \end{cases}.$

4) $\begin{cases} \text{Αν } \alpha \geq \beta \text{ και } \gamma \geq \delta, \text{ τότε } \alpha + \gamma \geq \beta + \delta \\ \text{Αν } \begin{pmatrix} \alpha \geq \beta \text{ και } \gamma \geq \delta \\ \text{και} \\ \alpha,\beta,\gamma,\delta > 0 \end{pmatrix}, \text{ τότε } \alpha\gamma \geq \beta\delta. \end{cases}$

5) Αν $\alpha,\beta \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu \geq \beta^\nu$$

6) $\dfrac{\alpha}{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha\beta \geq 0 \text{ και } \beta \neq 0)$

7) Αν $\alpha\beta > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\beta}.$$

Διαστήματα πραγματικών αριθμών

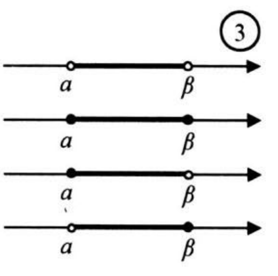
• Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, τότε ονομάζουμε **διαστήματα με άκρα τα α,β** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

$(\alpha,\beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}$: **ανοικτό διάστημα**

$[\alpha,\beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$: **κλειστό διάστημα**

$[\alpha,\beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x < \beta\}$: **κλειστό-ανοικτό διάστημα**

$(\alpha,\beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \leq \beta\}$: **ανοικτό-κλειστό διάστημα**.



● Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε ονομάζουμε **μη φραγμένα διαστήματα με άκρο το *α*** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

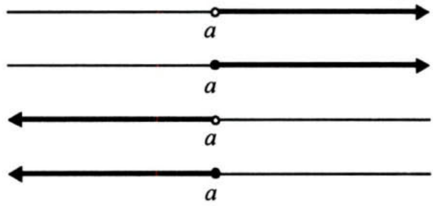
(4)

$(\alpha,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>\alpha\}$

$[\alpha,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq\alpha\}$

$(-\infty,\alpha)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<\alpha\}$

$(-\infty,\alpha]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\leq\alpha\}$



Υπό μορφή διαστήματος το σύνολο $\mathbb{R}$ το συμβολίζουμε με $(-\infty,+\infty)$.

Τα σημεία ενός διαστήματος Δ, που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, λέγονται **εσωτερικά σημεία** του Δ.

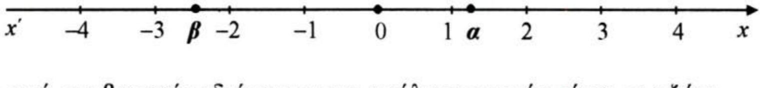
Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α, που συμβολίζεται με $|\alpha|$, ορίζεται ως εξής:

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha, & \text{αν } \alpha\geq 0\\ -\alpha, & \text{αν } \alpha<0\end{cases}$$

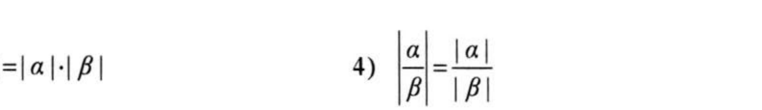
Γεωμετρικά, η απόλυτη τιμή του α παριστάνει την απόσταση του αριθμού α από το μηδέν,

(5)



ενώ η απόλυτη τιμή του $\alpha-\beta$ παριστάνει την **απόσταση των αριθμών *α* και *β*.**

(6)



Μερικές από τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής είναι οι εξής:

1) $|\alpha|^2=\alpha^2$

2) $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$

3) $|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$

4) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

5) $\big||\alpha|-|\beta|\big|\leq|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$

6) $|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta, \quad \delta>0$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να γραφούν υπό μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων τα σύνολα:

i) $A=\left\{x \mid \frac{1}{x} \leq 1\right\}$ **ii)** $A=\left\{x \mid \left|\frac{1}{x}-2\right|<1\right\}$.

ΛΥΣΗ

i) Είναι

$$\frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1-\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x-1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) \geq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x<0 \quad \text{ή} \quad x \geq 1.$$

Άρα $A=(-\infty, 0) \cup[1,+\infty)$.

ii) Είναι

$$\left|\frac{1}{x}-2\right|<1 \Leftrightarrow -1<\frac{1}{x}-2<1$$

$$\Leftrightarrow 1<\frac{1}{x}<3$$

$$\Leftrightarrow 1>x>\frac{1}{3}.$$

Άρα $A=\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης είναι γνωστή από προηγούμενες τάξεις. Στην παράγραφο αυτή υπενθυμίζουμε τον ορισμό της πραγματικής συνάρτησης με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, επαναλαμβάνουμε γνωστές έννοιες και τέλος ορίζουμε πράξεις μεταξύ των πραγματικών συναρτήσεων.