Ημερομηνία παράδοσης: 11 – 11 – 2020

1η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σημείωση: *Το πρώτο θέμα της εργασίας σας έχει σκοπό να σας βοηθήσει να θυμηθείτε σημαντικές έννοιες από την ύλη των προπτυχιακών σας σπουδών, οι οποίες αφορούν Σ.Δ.Ε. και αποτελούν ουσιώδες υπόβαθρο στην ύλη της ΘΕ ΜΣΜ60/71.*
Βοηθητικό υλικό για να ανταποκριθείτε στο θέμα αυτό περιλαμβάνεται στον τόμο Α, αν και όχι κατ΄ ανάγκην στα κεφάλαια της διδακτέας/εξεταστέας ύλης της ΘΕ.

ΘΕΜΑ 1 (*15 μονάδες*)

(**i**) Το Π.Α.Τ. για τη λογιστική εξίσωση

$$\begin{cases} N' = rN\left(1 - \frac{1}{k}N\right), \\ N(0) = N_0, \end{cases} \tag{1}$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τη μελέτη της εξάπλωσης του κορωνοϊού του οξέος αναπνευστικού συνδρόμου τύπου 2 (SARS-CoV-2). Στην περίπτωση αυτή, $N(t)$ είναι ο αριθμός των μολυσματικών ατόμων τη χρονική στιγμή t, $r > 0$ είναι ο ρυθμός διασποράς της λοίμωξης στον πληθυσμό, $k > 0$ το τελικό μέγεθος της επιδημίας και $N_0 > 0$ το αρχικό πλήθος των μολυσματικών ατόμων.

(a) Να λυθεί το Π.Α.Τ. (1).

(b) Να αποδειχθεί ότι στην πρώτη φάση της επιδημίας (για μικρό χρονικό διάστημα από την έναρξή της και με μικρό αρχικό πλήθος μολυσματικών ατόμων ως προς το τελικό), η αύξηση του αριθμού των κρουσμάτων είναι ουσιαστικά *εκθετική*, δηλαδή όταν $t \ll 1$ και $N_0 \ll k$, ισχύει ότι

$$N(t) \approx N_0\,\mathrm{e}^{rt}.$$

(**ii**) Έστω g μια περιττή συνάρτηση που ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz. Να δειχθεί ότι το Π.Α.Τ. $\{y' = g(y)\,;\, y(0) = 0\}$ έχει μόνο την ταυτοτικά μηδενική λύση.

(**iii**) (a) Να δειχθεί ότι όλες οι λύσεις της Σ.Δ.Ε.

$$y'' + \omega^2 y = 0, \text{ όπου } \omega > 0 \text{ σταθερά,} \tag{2}$$

είναι περιοδικές, με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
Το ω είναι η «ιδιοσυχνότητα» των λύσεων της (2).

(b) Να δειχθεί ότι όλες οι λύσεις της Σ.Δ.Ε.

$$y'' + y' + \omega^2 y = 0, \text{ όπου } \omega > \frac{1}{2} \text{ σταθερά,} \tag{3}$$

είναι μη περιοδικές, ταλαντούμενες και τείνουν στο 0, καθώς $t \to \infty$.

Ο αριθμός $\mu := \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}}$ *ονομάζεται «ημισυχνότητα» και προσδιορίζει τη συχνότητα της ταλάντωσης των λύσεων της* (3).

Τι συμβαίνει όταν $0 < \omega \leq \frac{1}{2}$;

(c) Έστω $\omega \gg 1$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{\mu}{\omega} \approx 1 - \frac{1}{8\omega^2}\,.$$

ΘΕΜΑ 2 (*25 μονάδες*) (Άσκηση 3.8, σελ.151, τόμος Α)

Δίνεται η Σ.Δ.Ε.

$$y' = \mu y(1-y)^2 - y^3 =: f_\mu(y). \tag{1}$$

(**i**) Να προσδιοριστούν τα σημεία ισορροπίας της (1).

(**ii**) Να μελετηθεί η ευστάθεια κάθε σημείου ισορροπίας για $\mu \in \mathbb{R}$.

(**iii**) Να προσδιοριστούν τα σημεία διακλάδωσης και να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης, συμπεριλαμβανομένης και της ευστάθειας.

ΘΕΜΑ 3 (*15 μονάδες*)

(**i**) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$w'(t) = -w(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

με

$$w(0) = w_0. \tag{2}$$

Στη συνέχεια να ελεγχθεί αν η λύση είναι ευσταθής και ειδικότερα, αν είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

(**ii**) Δίνεται το σύστημα των ΣΔΕ

$$x' = x(x^2 + y^2) - x, \ \ t \geq 0, \tag{3}$$

$$y' = y(x^2 + y^2) - y, \ \ t \geq 0. \tag{4}$$

Αν $\mathbf{w}(t) = (x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ είναι μία λύση του συστήματος (3), (4) για $t \geq 0$, και $\mathbf{w}_0(t) \equiv (0,0)^{\mathrm{T}}$ η ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση, που είναι επίσης λύση του, να βρεθεί η απόσταση

$$h(t) = \| \mathbf{w}(t) - \mathbf{w}_0(t) \|,$$

χωρίς να λυθεί το σύστημα. Με $\| \cdot \|$ συμβολίζουμε την ευκλείδια norm στον $\mathbb{R}^2$.

(**iii**) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (**ii**) να αποδειχθεί ότι η μηδενική λύση $\mathbf{w}_0(t)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

ΘΕΜΑ 4 (*20 μονάδες*) Δίνεται το σύστημα των ΣΔΕ

$$x' = y, \ \ t \geq 0 \tag{1}$$

$$y' = x, \ \ t \geq 0. \tag{2}$$

(**i**) Να προσδιοριστούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος και να βρεθεί η γενική του λύση.

(**ii**) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσεων του συστήματος, και να σημειωθεί η φορά των τροχιών, με αντίστοιχη δικαιολόγηση.

ΘΕΜΑ 5 (*25 μονάδες*)

(**i**) Να δειχθεί ότι το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για την Σ.Δ.Ε.

$$y' = -g(y)\,,\ y \in \mathbb{R},$$

όπου

($G1$) η g είναι τοπικά Lipschitz συνάρτηση στο διάστημα $(-a, a)$, $a > 0$,

($G2$) $g(0) = 0$,

($G3$) $y\, g(y) > 0$, $\forall y \in (-a, a) \setminus \{0\}$.

(**ii**) **Το απλό εκκρεμές** (πρβλ. Παράδειγμα 10.19, σελ. 529, του τόμου Α.)

(A) **Χωρίς τριβή.**
Θεωρούμε το διδιάστατο σύστημα

$$x_1' = f_1(x_1, x_2) = x_2\,,\ x_2' = f_2(x_1, x_2) = -\alpha \sin x_1\,,\ \alpha > 0 \ \text{ σταθερά.} \qquad (1)$$

Με χρήση της ενεργειακής συνάρτησης

$$V(x_1, x_2) := \int_0^{x_1} \alpha \sin y\, dy + \frac{1}{2} x_2^2, \qquad (2)$$

να αποδειχθεί ότι το $(0, 0)^{\mathrm{T}}$ είναι ευσταθές, αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές, σημείο ισορροπίας του (1).

(B) **Με τριβή.**
Θεωρούμε το διδιάστατο σύστημα

$$x_1' = \widetilde{f_1}(x_1, x_2) = x_2\,,\ x_2' = \widetilde{f_2}(x_1, x_2) = -\alpha \sin x_1 - \beta x_2\,,\ \alpha, \beta > 0 \ \text{ σταθ.} \qquad (3)$$

(B1) Με χρήση της ενεργειακής συνάρτησης (2) να αποδειχθεί ότι το $(0, 0)^{\mathrm{T}}$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας του (3).

(B2) Με χρήση της συνάρτησης

$$\widetilde{V}(\mathbf{x}) := \int_0^{x_1} \alpha \sin y\, dy + \frac{1}{2} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} P\, \mathbf{x}\,, \qquad (4)$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$, για κατάλληλο πίνακα P, να αποδειχθεί ότι το $\mathbf{0} := (0, 0)^{\mathrm{T}}$ είναι **ασυμπτωτικά** ευσταθές σημείο ισορροπίας του (3).

Σημείωση 1: Αν $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ και $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, τότε με $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ και $\mathcal{P}^{\mathrm{T}}$ συμβολίζονται, αντίστοιχα, το ανάστροφο του $\mathbf{x}$ και ο ανάστροφος του $\mathcal{P}$. Είναι γνωστό ότι αν ισχύουν οι υποθέσεις

$$p_{11} > 0 \ \text{ και } \ p_{11}\, p_{22} - p_{12}^2 > 0, \qquad (5)$$

τότε ο πίνακας $\mathcal{P}$ είναι θετικά ορισμένος.
Σημείωση 2: Αν έχουμε το γραμμικό σύστημα

$$\mathbf{y}' = \mathcal{Q} \cdot \mathbf{y}\,,\ \mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{6}$$

και θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$U(\mathbf{y}) := \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \cdot \mathcal{Q} \cdot \mathbf{y}, \tag{7}$$

τότε (με απλές πράξεις) προκύπτει ο τύπος

$$U'(\mathbf{y}) \equiv \frac{\partial U(\mathbf{y})}{\partial y_1}\, y_1' + \frac{\partial U(\mathbf{y})}{\partial y_2}\, y_2' = \left(\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\right)' \cdot \mathcal{Q} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \cdot \mathcal{Q} \cdot \mathbf{y}', \tag{8}$$

τον οποίον μπορείτε να χρησιμοποιήσετε.

Από τα ερωτήματα (Β1) και (Β2) συμπεραίνουμε ότι οι συνθήκες του Θεωρήματος Ευστάθειας του Lyapounov είναι **μόνο ικανές**.