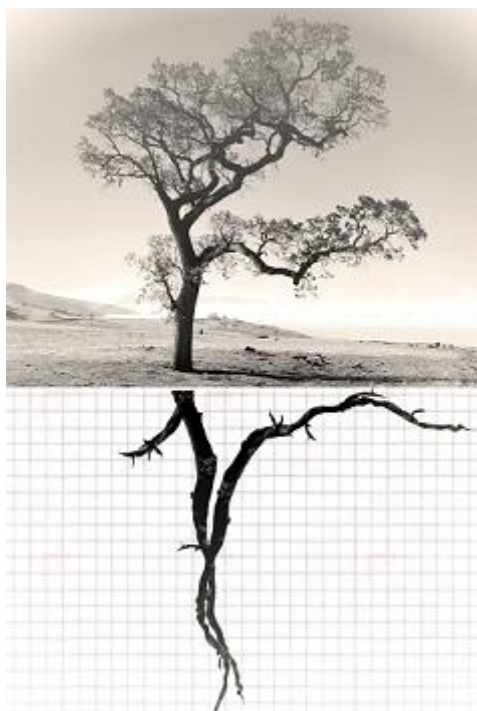


2. Πραγματικοί Αριθμοί



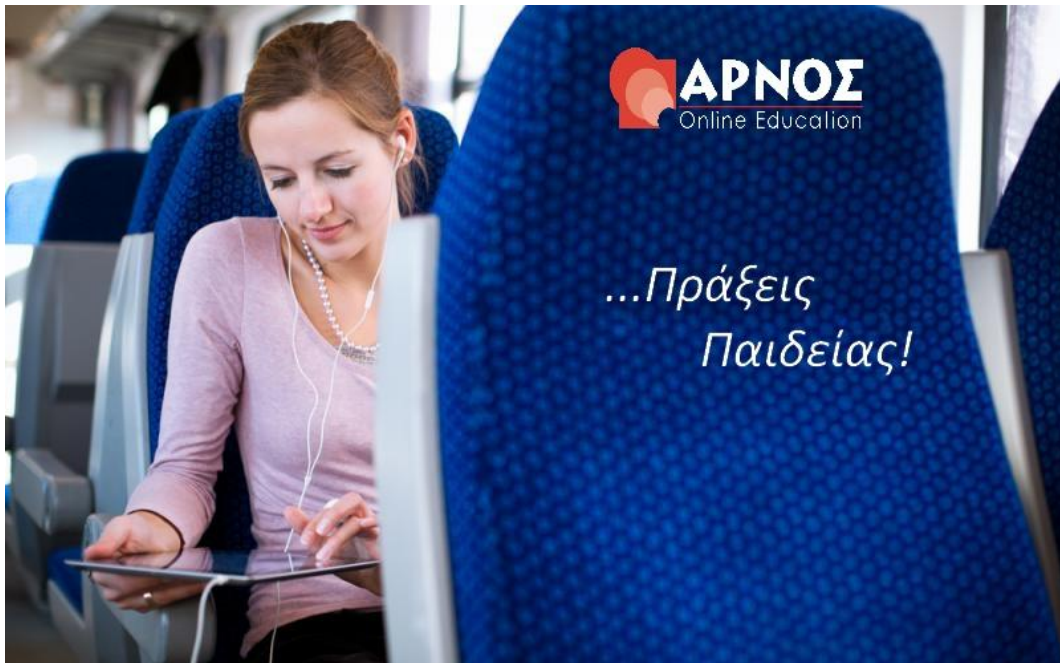
Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Β' Γυμνασίου

2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

σχ. βιβλίο (σσ. 43-44)

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία
για όλο το σχολικό έτος **μόνο με 150 ευρώ!**



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία
για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης
& SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.



Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Β' Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 43-44)

2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1

Για τους x, y ισχύει: $y = \sqrt{x}$. Στις παρακάτω ερωτήσεις επιλέξτε την σωστή

		A	B	Γ
α)	Ο x είναι:	θετικός ή μηδέν	αρνητικός ή μηδέν	οποιοσδήποτε αριθμός
β)	Ο y είναι:	θετικός ή μηδέν	αρνητικός ή μηδέν	οποιοσδήποτε αριθμός
γ)	Ισχύει η σχέση:	$x^2 = y$	$y^2 = x$	$x^2 = y^2$

Απάντηση

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a , λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό a . Η τετραγωνική ρίζα του a συμβολίζεται με $\sqrt{a}$.

Επειδή $0^2 = 0$ ορίζουμε $\sqrt{0} = 0$.

		A	B	Γ
α)	Ο x είναι:	θετικός ή μηδέν	αρνητικός ή μηδέν	οποιοσδήποτε αριθμός
β)	Ο y είναι:	θετικός ή μηδέν	αρνητικός ή μηδέν	οποιοσδήποτε αριθμός
γ)	Ισχύει η σχέση:	$x^2 = y$	$y^2 = x$	$x^2 = y^2$

Ερώτηση 2

Η εξίσωση $x^2 = 16$ έχει λύσεις

Α . μόνο το 4

Β . μόνο το -4

Γ . το 4 και το -4

Απάντηση

Γ . το 4 και το -4 , γιατί $4^2 = 16$ και $(-4)^2 = 16$

Ερώτηση 3

Στον διπλανό πίνακα να αντιστοιχίσετε σε κάθε αριθμό της στήλης Α την τετραγωνική του ρίζα που βρίσκεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
9	16
	3
16	2
	8
4	5
	18
25	6
	4
36	

Απάντηση

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{36} = 6$$

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
9	16
	3
16	2
	8
4	5
	18
25	6
	4
36	

Ερώτηση 4

Να εξετάσετε αν αληθεύουν οι παρακάτω προτάσεις

α) $\sqrt{16} = 8$

β) $\sqrt{4} = 16$

γ) $\sqrt{9} = 3$

δ) $\sqrt{0,4} = 0,2$

ε) $\sqrt{-9} = -3$

στ) η $\sqrt{0}$ δεν υπάρχει

ζ) $\sqrt{4} = -2$

η) $\sqrt{16+9} = 5$

θ) $\sqrt{25-9} = 5-3 = 2$

ι) $\sqrt{100} = 50$

Απάντηση

- α) Είναι **λάθος** γιατί $8^2 = 64$
- β) Είναι **λάθος** γιατί $\sqrt{4} = 2$
- γ) Είναι **σωστό**
- δ) Είναι **λάθος** γιατί $0,2^2 = 0,04$
- ε) Είναι **λάθος** γιατί η $\sqrt{-9}$ δεν ορίζεται
- στ) Είναι **λάθος** γιατί έχει ορισθεί $\sqrt{0} = 0$
- ζ) Είναι **λάθος** γιατί τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α , λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α .
- η) Είναι **σωστό** $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
- θ) Είναι **λάθος** γιατί $\sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$
- ι) Είναι **λάθος** γιατί $\sqrt{100} = 10$

Ερώτηση 5

Αν x είναι ένας θετικός αριθμός, στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή

		A	B	Γ	Δ	Ε
1.	Αν $\sqrt{x} = 5$, τότε	$x = 10$	$x = 25$	$x = -25$	$x = 2,5$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
2.	Αν $\sqrt{x} = 9$, τότε	$x = 3$	$x = 81$	$x = 4,5$	$x = \pm 81$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
3.	Αν $\sqrt{x} = -16$, τότε	$x = 4$	$x = -4$	$x = 256$	$x = -8$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
4.	Αν $\sqrt{100} = x$, τότε	$x = 10$	$x = 50$	$x = 100$	$x = \pm 10$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη

Απάντηση

1. Αν $\sqrt{x} = 5$ τότε $x = 25$ γιατί $5^2 = 25$
2. Αν $\sqrt{x} = 9$ τότε $x = 81$ γιατί $9^2 = 81$
3. Αν $\sqrt{x} = -16$ τότε η σχέση είναι αδύνατη γιατί τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α , είναι θετικός αριθμός.
4. Αν $\sqrt{100} = x$ τότε $x = 10$ γιατί $10^2 = 100$

		A	B	Γ	Δ	Ε
1.	Αν $\sqrt{x} = 5$, τότε	$x = 10$	$x = 25$	$x = -25$	$x = 2,5$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
2.	Αν $\sqrt{x} = 9$, τότε	$x = 3$	$x = 81$	$x = 4,5$	$x = \pm 81$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
3.	Αν $\sqrt{x} = -16$, τότε	$x = 4$	$x = -4$	$x = 256$	$x = -8$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
4.	Αν $\sqrt{100} = x$, τότε	$x = 10$	$x = 50$	$x = 100$	$x = \pm 10$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες

- α) $\sqrt{81}$, $\sqrt{0,81}$, $\sqrt{8100}$
- β) $\sqrt{4}$, $\sqrt{0,04}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{40000}$
- γ) $\sqrt{121}$, $\sqrt{1,21}$, $\sqrt{12100}$, $\sqrt{0,0121}$
- δ) $\sqrt{\frac{9}{4}}$, $\sqrt{\frac{144}{25}}$, $\sqrt{\frac{400}{49}}$, $\sqrt{\frac{36}{121}}$

Απάντηση

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α , λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α . Έτσι έχουμε:

$$\alpha) \sqrt{81} = 9, \quad \sqrt{0,81} = 0,9, \quad \sqrt{8100} = 90$$

$$\beta) \sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{0,04} = 0,2, \quad \sqrt{400} = 20, \quad \sqrt{40000} = 200$$

$$\gamma) \sqrt{121} = 11, \quad \sqrt{1,21} = 1,1, \quad \sqrt{12100} = 110, \quad \sqrt{0,0121} = 0,11$$

$$\delta) \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}, \quad \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}, \quad \sqrt{\frac{400}{49}} = \frac{20}{7}, \quad \sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{6}{11}$$

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε τους αριθμούς

$$\alpha) \sqrt{36} = \quad \beta) \sqrt{18 + 18} = \quad \gamma) \sqrt{18 \cdot 18} = \quad \delta) (\sqrt{18})^2 =$$

Απάντηση

Για κάθε θετικό αριθμό α ισχύουν επίσης $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$ και $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$

$$\alpha) \sqrt{36} = 6, \quad \beta) \sqrt{18 + 18} = \sqrt{36} = 6$$

$$\gamma) \sqrt{18 \cdot 18} = \sqrt{18^2} = 18 \quad \delta) (\sqrt{18})^2 = 18$$

Άσκηση 3

Να τοποθετήσετε σε κάθε τετράγωνο έναν κατάλληλο αριθμό ώστε να ισχύει η αντίστοιχη ισότητα

$$\alpha) \sqrt{\frac{4}{\square}} = \frac{2}{3}$$

$$\beta) (\sqrt{\square})^2 = 5$$

$$\gamma) \sqrt{\square + 3} = 6$$

$$\delta) \sqrt{\square} + 2 = 11$$

$$\epsilon) 2 - \sqrt{\square} = 0$$

$$\sigma\tau) (\sqrt{\square})^2 + \sqrt{\square} = 6$$

Απάντηση

$$\alpha) \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad \text{Για θετικούς αριθμούς } \alpha \text{ και } \beta \text{ ισχύει } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}$$

$$\beta) (\sqrt{5})^2 = 5 \quad \text{Για κάθε θετικό αριθμό } \alpha \text{ ισχύει } (\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$$

$$\gamma) \sqrt{33 + 3} = 6$$

$$\delta) \sqrt{81} + 2 = 11$$

$$\epsilon) 2 - \sqrt{4} = 0$$

$\sigma\tau)$ Εδώ η απάντηση μπορεί να δοθεί με πολλούς τρόπους

$$\text{π.χ. } (\sqrt{0})^2 + \sqrt{36} = 6 \quad \text{ή} \quad (\sqrt{6})^2 + \sqrt{0} = 6 \quad \text{ή} \quad (\sqrt{3})^2 + \sqrt{9} = 3 + 3 = 6$$

$$\text{ή} \quad (\sqrt{2,5})^2 + \sqrt{12,25} = 2,5 + 3,5 = 6 \dots\dots$$

Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι

$$\alpha) \sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2} + \sqrt{9}} = 2$$

$$\beta) \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} = 2$$

$$\gamma) \sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}} = 3$$

Απάντηση

Αρχίζουμε από τις ρίζες που υπολογίζονται αμέσως χωρίς να επηρεάζεται η υπόλοιπη ποσότητα

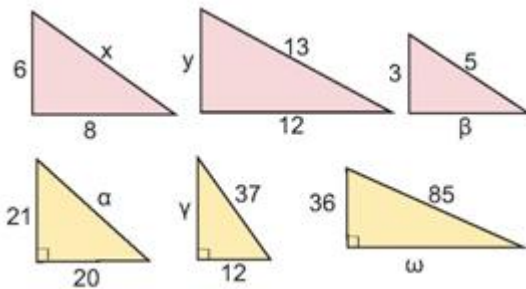
$$\alpha) \sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2} + \sqrt{9}} = \sqrt{\frac{2}{2} + 3} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\beta) \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} = \sqrt{2 + \sqrt{2+2}} = \sqrt{2 + \sqrt{4}} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\gamma) \sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}} = \sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{1+3}}} = \sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} = \sqrt{7 + \sqrt{2+2}} = \sqrt{7 + \sqrt{4}} = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$$

Άσκηση 5

Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά των παρακάτω ορθογωνίων τριγώνων



Απάντηση

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτεινουσας (Πυθαγόρειο θεώρημα, παραγρ. Β1.4)

Υπολογισμός του x :

$$x^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow x^2 = 36 + 64 \Leftrightarrow x^2 = 100 \quad \text{άρα} \quad x = \sqrt{100} = 10$$

Υπολογισμός του γ :

$$13^2 = \gamma^2 + 12^2 \Leftrightarrow 169 = \gamma^2 + 144 \Leftrightarrow 169 - 144 = \gamma^2 \Leftrightarrow 25 = \gamma^2 \quad \text{άρα} \quad \gamma = \sqrt{25} = 5$$
$$\Gamma: 5^2 = 3^2 + \beta^2$$

Υπολογισμός του β :

$$25 = 9 + \beta^2 \Leftrightarrow 25 - 9 = \beta^2 \Leftrightarrow 16 = \beta^2 \quad \text{άρα} \quad \beta = \sqrt{16} = 4$$

Υπολογισμός του α :

$$\alpha^2 = 21^2 + 20^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 441 + 400 \Leftrightarrow \alpha^2 = 841 \quad \text{άρα} \quad \alpha = \sqrt{841} = 29$$

Υπολογισμός του γ :

$$37^2 = \gamma^2 + 12^2 \Leftrightarrow 1369 = \gamma^2 + 144 \Leftrightarrow 1369 - 144 = \gamma^2$$
$$\Leftrightarrow 1225 = \gamma^2 \quad \text{άρα} \quad \gamma = \sqrt{1225} = 35$$

Υπολογισμός του ω :

$$85^2 = 36^2 + \omega^2 \Leftrightarrow 7225 = 1296 + \omega^2 \Leftrightarrow 7225 - 1296 = \omega^2$$
$$\Leftrightarrow 5929 = \omega^2 \quad \text{άρα} \quad \omega = \sqrt{5929} = 77$$

Άσκηση 6

Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς x που ικανοποιούν τις εξισώσεις

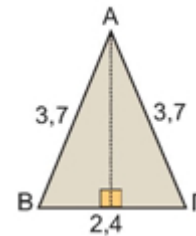
α) $x^2 = 9$ β) $x^2 = 25$ γ) $x^2 = 64$ δ) $x^2 = \frac{100}{81}$

Απάντηση

α) $x = \sqrt{9} = 3$ β) $x = \sqrt{25} = 5$ γ) $x = \sqrt{64} = 8$ δ) $x = \sqrt{\frac{100}{81}} = \frac{10}{9}$

Άσκηση 7

Να υπολογίσετε το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.



Απάντηση

Στο ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση

διέρχεται από το μέσο της. Άρα $BD = \frac{2,4}{2} = 1,2$

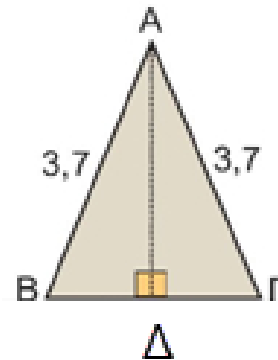
Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΒ.

Άρα $AB^2 = AD^2 + BD^2$ οπότε

$$3,7^2 = AD^2 + 1,2^2 \Leftrightarrow 13,69 = AD^2 + 1,44$$

$$\Leftrightarrow 13,69 - 1,44 = AD^2 \Leftrightarrow 12,25 = AD^2$$

$$\text{άρα } AD = \sqrt{12,25} = 3,5$$



Άσκηση 8

Να υπολογίσετε την διαγώνιο ενός ορθογωνίου γηπέδου που έχει διαστάσεις 65 m και 72 m.

Απάντηση

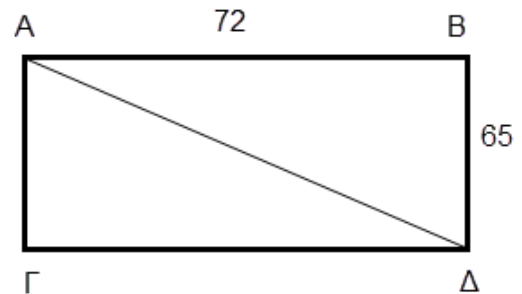
Έστω $AB\Gamma\Delta$ το ορθογώνιο γήπεδο με $AB = 72\text{m}$
και $A\Delta = 65\text{m}$.

Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα
την $A\Delta$.

$$\text{Άρα } B\Delta^2 = A\Delta^2 + AB^2$$

$$\text{οπότε } B\Delta^2 = 65^2 + 72^2 \Leftrightarrow B\Delta^2 = 4225 + 5184$$

$$\Leftrightarrow B\Delta^2 = 9409 \quad \text{άρα } B\Delta = \sqrt{9409} = 97 \text{ m.}$$



Άσκηση 9

Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού, αν αυξηθεί κατά 8, γίνεται ίσο με το τριπλάσιο
του τετραγώνου του αριθμού αυτού. Ποιός είναι ο αριθμός αυτός ;

Απάντηση

Θα κατασκευάσουμε εξίσωση με άγνωστο το ζητούμενο αριθμό που εδώ θα τον
συμβολίσουμε με x .

Το τετράγωνο του x είναι x^2 και αν αυξηθεί κατά 8 θα γίνει: $x^2 + 8$

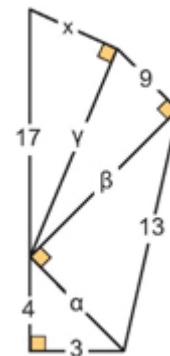
Το τριπλάσιο του τετραγώνου του αριθμού αυτού είναι: $3x^2$

$$\text{Άρα } x^2 + 8 = 3x^2$$

$$x^2 + 8 = 3x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \quad \text{άρα } x = \sqrt{4} = 2$$

Άσκηση 10

Στο διπλανό σχήμα να βρείτε το μήκος x



Απάντηση

Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια και για τον υπολογισμό των άγνωστων πλευρών θα χρησιμοποιήσουμε σε καθένα από αυτά το Πυθαγόρειο θεώρημα,

Υπολογισμός του α :

$$\alpha^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 25 \quad \text{άρα} \quad \alpha = \sqrt{25} = 5$$

Υπολογισμός του β :

$$13^2 = 5^2 + \beta^2 \Leftrightarrow 169 = 25 + \beta^2 \Leftrightarrow 144 = \beta^2 \quad \text{άρα} \quad \beta = \sqrt{144} = 12$$

Υπολογισμός του γ :

$$\gamma^2 = 9^2 + 12^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 81 + 144 \Leftrightarrow \gamma^2 = 225 \quad \text{άρα} \quad \gamma = \sqrt{225} = 15$$

Υπολογισμός του x :

$$17^2 = x^2 + 15^2 \Leftrightarrow 289 = x^2 + 225 \Leftrightarrow 64 = x^2 \quad \text{άρα} \quad x = \sqrt{64} = 8$$

Άσκηση 11

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{\alpha}$, α , α^2 στις παρακάτω δύο περιπτώσεις

α) Αν $\alpha > 1$ π.χ $\alpha = 4$, $\alpha = 9$, $\alpha = 16$

β) Αν $0 < \alpha < 1$ π.χ $\alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{1}{9}$, $\alpha = \frac{1}{16}$

Τι παρατηρείτε ;

Απάντηση

α) Αν $\alpha = 4$ τότε $\sqrt{\alpha} = \sqrt{4} = 2$ και $\alpha^2 = 4^2 = 16$

Και αφού $2 < 4 < 16$ θα είναι $\sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$

Ομοίως, αν $\alpha = 9$ ή $\alpha = 16$ θα είναι $\sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$

β) Αν $\alpha = \frac{1}{4}$ τότε $\sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ και $\alpha^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

Και αφού $\frac{1}{16} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ θα είναι $\alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha}$

Ομοίως αν $\alpha = \frac{1}{9}$ ή $\alpha = \frac{1}{16}$ θα είναι $\alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha}$

Παρατηρούμε ότι: αν $\alpha > 1$ τότε $\sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$

αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha}$

Άσκηση 12

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$
9	4				
36	49				

Τι συμπεραίνετε ;

Απάντηση

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$
9	4	3	2	6	6
36	49	6	7	42	42

Φαίνεται να ισχύει ότι $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$

Άσκηση 13

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα
Τι συμπεραίνετε ;

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
4	16				
25	36				

Απάντηση

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
4	16	2	4	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
25	36	5	6	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$

Φαίνεται να ισχύει ότι $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$

Άσκηση 14

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα
Τι συμπεραίνετε ;

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$
9	16				
64	36				

Απάντηση

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha + \beta}$
9	16	3	4	$3 + 4 = 7$	5
64	36	8	6	$8 + 6 = 14$	10

Συμπεραίνουμε ότι το $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ γενικά δεν είναι ίσο με το $\sqrt{\alpha + \beta}$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης MED - Μαθηματικός



...Πράξεις Παιδείας!