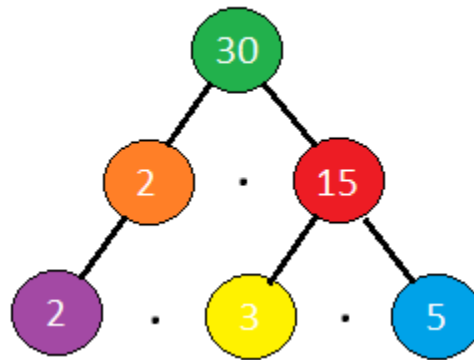


1. Οι Φυσικοί Αριθμοί



Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Α' Γυμνασίου

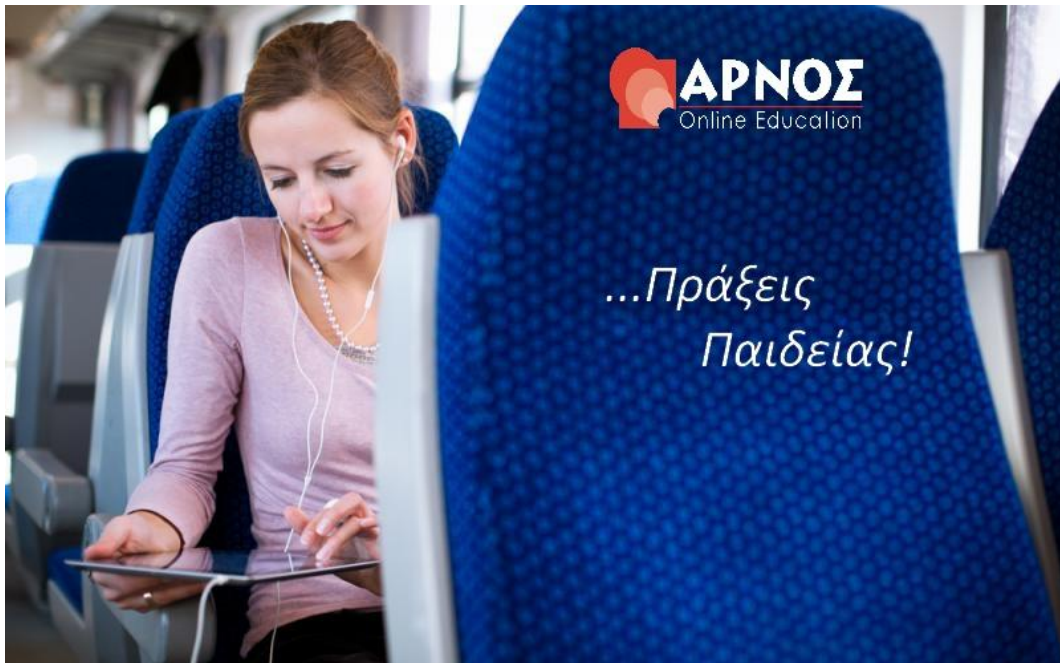
1.5 Διαιρετότητα – ΜΚΔ – ΕΚΠ

Γινόμενο πρώτων παραγόντων

σχ. βιβλίο (σ. 30)

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.



Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Α' Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σ. 30)

1.5 Χαρακτήρες Διαιρετότητας – ΜΚΔ – ΕΚΠ

Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Άσκηση 1

Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

- (α) Ένα κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 8 είναι ο αριθμός και το $ΕΚΠ(5, 8) = \dots$
(β) Αν το $ΕΚΠ(\alpha, \beta) = \beta$, ο β είναι του α .
(γ) Πρώτοι λέγονται οι αριθμοί που
και σύνθετοι λέγονται οι αριθμοί που
(δ) Δύο αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους όταν.....

Λύση

(α) Ένα κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 8 είναι ο αριθμός **120** και το

$$ΕΚΠ(5, 8) = 5 \cdot 8 = 40.$$

(β) Αν το $ΕΚΠ(\alpha, \beta) = \beta$, ο β είναι **πολλαπλάσιο** του α .

(γ) Πρώτοι λέγονται οι αριθμοί που **διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και τη μονάδα** και σύνθετοι λέγονται οι αριθμοί που **δεν είναι πρώτοι**.

(δ) Δύο αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους, όταν **έχουν ΜΚΔ τη μονάδα**.

Άσκηση 2

Συμπλήρωσε το κενό με κατάλληλο ψηφίο ώστε ο αριθμός που θα σχηματισθεί να διαιρείται με το 9:

$$(α) 6\square 4, (β) 95\square 4, (γ) 601\square$$

Λύση

Γνωρίζουμε από τα **Κριτήρια Διαιρετότητας του 9**, ότι ένας αριθμός διαιρείται με το 9 όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9.

(α) Αφού $6 + 4 = 10$ και ο 18 είναι ο αμέσως μεγαλύτερος αριθμός του 10 που διαιρείται με το 9. Οπότε, στη θέση του κενού θα μπει ο αριθμός 8.
Τελικά, λαμβάνουμε τον αριθμό 684.

(β) Αφού $9 + 5 + 4 = 18$ που διαιρείται με το 9 και ο 27 είναι ο αμέσως μεγαλύτερος αριθμός του 18 που διαιρείται με το 9. Οπότε, στη θέση του κενού θα μπει ο αριθμός 0 ή ο αριθμός 9. Τελικά, λαμβάνουμε τον αριθμό 9504, τον αριθμό 9594, αντίστοιχα.

(γ) Αφού $6 + 1 = 7$ και ο 9 είναι ο αμέσως μεγαλύτερος αριθμός του 7 που διαιρείται με το 9. Οπότε, στη θέση του κενού θα μπει το 2. Τελικά, λαμβάνουμε τον αριθμό 6012.

Άσκηση 3

Συμπλήρωσε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση

(α)	EΚΠ (3, 5) =	8 ☐	9 ☐	15 ☐	30 ☐
(β)	EΚΠ (11, 6) =	17 ☐	36 ☐	66 ☐	132 ☐
(γ)	EΚΠ (5, 10) =	10 ☐	15 ☐	45 ☐	50 ☐
(δ)	EΚΠ (3, 2, 5) =	15 ☐	20 ☐	30 ☐	60 ☐
(ε)	EΚΠ (3, 6, 9) =	9 ☐	18 ☐	36 ☐	27 ☐
(στ)	EΚΠ (8, 12, 15) =	15 ☐	30 ☐	60 ☐	120 ☐

Λύση

(α)	ΕΚΠ (3, 5) =	8 ☐	9 ☐	15 ☒	30 ☐
(β)	ΕΚΠ (11, 6) =	17 ☐	36 ☐	66 ☒	132 ☐
(γ)	ΕΚΠ (5, 10) =	10 ☒	15 ☐	45 ☐	50 ☐
(δ)	ΕΚΠ (3, 2, 5) =	15 ☐	20 ☐	30 ☒	60 ☐
(ε)	ΕΚΠ (3, 6, 9) =	9 ☐	18 ☒	36 ☐	27 ☐
(στ)	ΕΚΠ (8, 12, 15) =	15 ☐	30 ☐	60 ☐	120 ☒

Άσκηση 4

Η εταιρεία Α βγάζει νέο μοντέλο αυτοκινήτου κάθε 2 χρόνια, η εταιρεία Β κάθε 3 χρόνια και η εταιρεία Γ κάθε 5 χρόνια. Αν το 2001 έβγαλαν και οι τρεις εταιρείες νέα μοντέλα, τότε θα ξαναβγάλουν και οι τρεις μαζί νέο μοντέλο;



Λύση

Το πιο μικρό διάστημα σε έτη που θα περάσει για να ξαναβγάλουν και οι τρεις εταιρείες μαζί νέο μοντέλο, για πρώτη φορά, θα ισούται με το ΕΚΠ των αριθμών 2, 3 και 5. Είναι: $\text{ΕΚΠ}(2, 3, 5) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Συνεπώς, οι τρεις εταιρείες θα ξαναβγάλουν μαζί νέο μοντέλο μετά από 30 έτη, δηλαδή το έτος: $2001 + 30 = \mathbf{2031}$.

Άσκηση 5

Ένας γυμναστής παρατήρησε ότι όταν τοποθετεί τους μαθητές της α' γυμνασίου ανά 3, ανά 5, ανά 7 δεν περισσεύει κανένας. Πόσοι ήταν οι μαθητές της α' γυμνασίου στο σχολείο αυτό, αν γνωρίζουμε ότι το πλήθος τους είναι μεταξύ 100 και 200;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι όταν οι μαθητές παρατάσσονται σε 3άδες, 5άδες, ή επτάδες δεν περισσεύει κανένας. Συνεπώς, το πλήθος των μαθητών της α' γυμνασίου πρέπει να είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 3, 5 και 7, το οποίο πρέπει να είναι αριθμός μεταξύ του 100 και του 200.

Τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών 3, 5 και 7 είναι: 105, 210, 315,...

Όμως, $\text{ΕΚΠ}(3, 5, 7) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ και επειδή το 105 είναι το μοναδικό κοινό πολλαπλάσιο των 3, 5 και 7 μεταξύ του 100 και του 200, συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές είναι τελικά σε πλήθος 105.

Άσκηση 6

Ο Γιάννης πηγαίνει στον κινηματογράφο κάθε 10 ημέρες και ο Νίκος κάθε 12 ημέρες. Αν συναντήθηκαν στις 10 Μαρτίου στον κινηματογράφο, τότε θα ξανασυναντηθούν;

Στο διάστημα μεταξύ των δύο συναντήσεων τους πόσες φορές έχει πάει ο καθένας τους χωριστά στον κινηματογράφο;

Λύση

Το σύνολο των ημερών που θα μεσολαβήσουν, μέχρι να ξανασυναντηθούν στον κινηματογράφο ο Γιάννης και ο Νίκος, πρέπει να είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 10 και 12. Το ΕΚΠ των αριθμών 10 και 12 ισούται με: $\text{ΕΚΠ}(10, 12) = 60$. Οπότε, θα ξανασυναντηθούν στον κινηματογράφο, για πρώτη φορά, μετά από 60 ημέρες. Οι 60 ημέρες αντιστοιχούν στις 21 ημέρες του Μαρτίου συν τις 30 ημέρες του Απριλίου συν τις 9 ημέρες του Μαΐου.

Θα ξανασυναντηθούν δηλαδή στις 9 Μαΐου.

Μέχρι τότε, ο Γιάννης θα έχει πάει συνολικά $60:10 = 6$ φορές στον κινηματογράφο, όμως μόνος του θα έχει πάει: $6 - 1 = 5$ φορές.

Αντιστοίχως, ο Νίκος θα έχει πάει συνολικά $60:12 = 5$ φορές στον κινηματογράφο, όμως μόνος του θα έχει πάει: $5 - 1 = 4$ φορές.

Άσκηση 7

Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση

(α)	$ΜΚΔ(5, 8) =$	1 ☐	5 ☐	8 ☐	40 ☐
(β)	$ΜΚΔ(16, 24) =$	4 ☐	8 ☐	16 ☐	24 ☐
(γ)	$ΜΚΔ(30, 15) =$	3 ☐	5 ☐	15 ☐	30 ☐
(δ)	$ΜΚΔ(10, 30, 60) =$	5 ☐	10 ☐	30 ☐	60 ☐
(ε)	$ΜΚΔ(22, 32, 50) =$	2 ☐	11 ☐	72 ☐	82 ☐

Λύση

(α)	$ΜΚΔ(5, 8) =$	1 ☒	5 ☐	8 ☐	40 ☐
(β)	$ΜΚΔ(16, 24) =$	4 ☐	8 ☒	16 ☐	24 ☐
(γ)	$ΜΚΔ(30, 15) =$	3 ☐	5 ☐	15 ☒	30 ☐
(δ)	$ΜΚΔ(10, 30, 60) =$	5 ☐	10 ☒	30 ☐	60 ☐
(ε)	$ΜΚΔ(22, 32, 50) =$	2 ☒	11 ☐	72 ☐	82 ☐

Άσκηση 8

Δύο αριθμοί έχουν ΜΚΔ το 24.

Να δικαιολογήσεις γιατί έχουν και άλλους κοινούς διαιρέτες διαφορετικούς από τη μονάδα.

Λύση

Όπως γνωρίζουμε, ο αριθμός 24 είναι σύνθετος, καθώς εκτός από τον εαυτόν του και τη μονάδα, έχει ως διαιρέτες και άλλους αριθμούς. Παραδείγματος χάριν, ο αριθμός 24 διαιρείται με το 2, το 3, το 6 και ούτω καθεξής.

Οπότε, οι αριθμοί που έχουν ΜΚΔ = 24, έχουν διαιρέτες και όλους τους διαιρέτες του 24 εκ των οποίων αρκετοί είναι διαφορετικοί από τη μονάδα.

Άσκηση 9

Βρες τους διαιρέτες των αριθμών 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Ποιοι από τους αριθμούς αυτούς είναι πρώτοι; Ποιοι είναι σύνθετοι;

Λύση

Διαιρέτες του **10**: 1, 2, 5, 10

Διαιρέτες του **11**: 1, 11

Διαιρέτες του **12**: 1, 2, 3, 4, 6, 12

Διαιρέτες του **13**: 1, 13

Διαιρέτες του **14**: 1, 2, 7, 14

Διαιρέτες του **15**: 1, 3, 5, 15

Διαιρέτες του **16**: 1, 2, 4, 8, 16

Διαιρέτες του **17**: 1, 17

Διαιρέτες του **18**: 1, 2, 3, 6, 9, 18

Διαιρέτες του **19**: 1, 19

Διαιρέτες του **20**: 1, 2, 4, 5, 10, 20

Πρώτοι είναι οι αριθμοί: 11, 13, 17, 19

Σύνθετοι είναι οι αριθμοί: 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20

Άσκηση 10

Το διπλάσιο ενός πρώτου αριθμού είναι πρώτος αριθμός ή σύνθετος και γιατί;

Λύση

Έστω α ο πρώτος αριθμός. Το διπλάσιο του ισούται με $2 \cdot \alpha$ και έχει ως διαιρέτες τους: 1, 2, α , $2 \cdot \alpha$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι εκτός από τον εαυτόν του και τη μονάδα, ο αριθμός α έχει και άλλους διαιρέτες. Οπότε, ο αριθμός α είναι σύνθετος.

Άσκηση 11

Να βρεις όλους τους διαιρέτες των παρακάτω αριθμών:

(α) 28 (β) 82 (γ) 95 (δ) 105 (ε) 124 (στ) 345 (ζ) 1.232 (η) 3.999

Λύση

(α) Διαιρέτες του **28**: 1, 2, 4, 7, 14, 28

(β) Διαιρέτες του **82**: 1, 2, 41, 82

(γ) Διαιρέτες του **95**: 1, 5, 19, 95

(δ) Διαιρέτες του **105**: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105

(ε) Διαιρέτες του **124**: 1, 2, 4, 31, 62, 124

(στ) Διαιρέτες του **345**: 1, 3, 5, 15, 23, 69, 115, 345

(ζ) Διαιρέτες του **1.232**: 1, 2, 4, 7, 8, 11, 14, 16, 22, 28, 44, 56, 77,

88, 112, 154, 176, 308, 616, 1232

(η) Διαιρέτες του **3.999**: 1, 3, 1333, 3999

Άσκηση 12

Να αναλυθούν οι ακόλουθοι αριθμοί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

(α) 78 (β) 348 (γ) 1.210 (δ) 2.344

Λύση

Αναλύοντας τους παραπάνω αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, έχουμε με τη μέθοδο των διαδοχικών διαιρέσεων:

78	2	348	2	1.210	2	2.344	2
39	3	174	2	605	5	1.172	2
13	13	87	3	121	11	586	2
1		29	29	11	11	293	293
		1		1			

Άρα, έχουμε για κάθε αριθμό, την ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

$$(α) 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$(β) 348 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 29 = 2^2 \cdot 3 \cdot 29$$

$$(γ) 1.210 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2$$

$$(δ) 2.344 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 293 = 2^3 \cdot 293$$

Επιμέλεια: Βασίλης Τσιλιβής – Μαθηματικός



...Πράξεις Παιδείας!