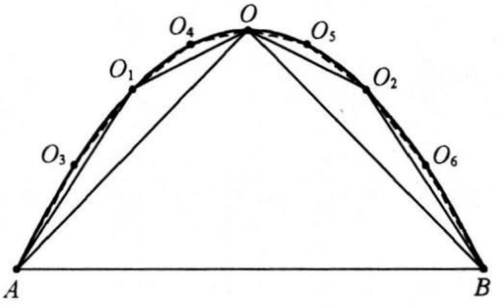
ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Αρχική συνάρτηση - Αόριστο ολοκλήρωμα

Η αυτονόητη σημασία των προβλημάτων που συνδέονται με τον υπολογισμό εμβαδών και οι ιδιαίτερες δυσκολίες που παρουσιάζουν, οδήγησαν τους μαθηματικούς από την αρχαιότητα στην επινόηση γενικών μεθόδων μέτρησης εμβαδών, ιδιαίτερα επιφανειών που περικλείονται από καμπύλες. Καθοριστική στο ζήτημα αυτό υπήρξε η συμβολή των αρχαίων Ελλήνων και ιδιαίτερα του Αρχιμήδη. Οι ιδέες του Αρχιμήδη πάνω στο πρόβλημα του εμβαδού υπήρξαν η αφετηρία της δημιουργίας του σύγχρονου ολοκληρωτικού λογισμού. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο τρόπος υπολογισμού του εμβαδού μιας επιφάνειας που περικλείεται από ένα τμήμα παραβολής και ένα ευθύγραμμο τμήμα (παραβολικό χωρίο).



Έστω ένα παραβολικό χωρίο με βάση AB και κορυφή O (το σημείο της παραβολής που έχει τη μέγιστη απόσταση από τη βάση). Ο Αρχιμήδης, φέρνοντας τις χορδές OA και OB, δημιουργεί δυο νέα παραβολικά χωρία με βάσεις OA, OB και κορυφές O_1, O_2 αντίστοιχα. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής, αποδεικνύει ότι για τα εμβαδά των τριών τριγώνων OAB, O_1AO και O_2BO ισχύει η σχέση

$$(OAB) = 4[(O_1AO) + (O_2BO)]\,. \tag{1}$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία στα νέα παραβολικά χωρία, βρίσκει ότι

$$(O_1AO) = 4[(O_3AO_1) + (O_4O_1O)] \tag{2}$$

και

$$(O_2BO) = 4[(O_5O_2O) + (O_6BO_2)] \tag{3}$$

Με τον τρόπο αυτό, το εμβαδόν E του παραβολικού χωρίου μπορεί να προσεγγιστεί ("εξαντληθεί") από ένα άθροισμα εμβαδών εγγεγραμμένων τριγώνων ως εξής:

$$E = (OAB) + [(O_3AO_1) + (O_4O_1O)] + [(OAO_1) + (O_4O_1O)] +$$
$$+[(O_5O_2O) + (O_6BO_2)] + \cdots$$

$$= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \frac{1}{4}(O_1AO) + \frac{1}{4}(O_2BO) + \cdots$$

$$= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \frac{1}{4}[(O_1AO) + (O_2BO)] + \cdots$$

$$= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 (OAB) + \cdots$$

Όπως είναι φανερό, πρόκειται για το άθροισμα των (απείρων) όρων μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το $\alpha = (OAB)$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{4}$. Το άθροισμα αυτό δίνεται σήμερα από το γνωστό τύπο

$$\frac{\alpha}{1-\lambda} = \frac{(OAB)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}(OAB).$$

Το εμβαδόν λοιπόν του παραβολικού χωρίου είναι ίσο με τα $\frac{4}{3}$ του εμβαδού του τριγώνου που ορίζουν τα άκρα της βάσης και η κορυφή της παραβολής[*]

Όπως στα προβλήματα ακροτάτων και εφαπτομένων έτσι και στο πρόβλημα του εμβαδού, οι ιδέες των αρχαίων Ελλήνων γνώρισαν παραπέρα εξέλιξη μετά την ανάπτυξη της Άλγεβρας και την εφαρμογή της σε γεωμετρικά προβλήματα. Στη διάρκεια του 17ου αιώνα διαπιστώθηκε ότι ο υπολογισμός των εμβαδών μπορεί να γίνει με μια διαδικασία αντίστροφη προς αυτήν της παραγώγισης.

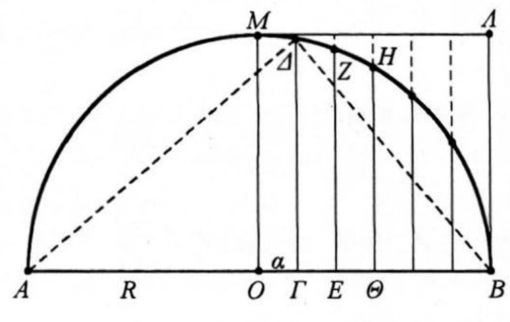
Ορισμένο ολοκλήρωμα - Η έννοια του εμβαδού

Χαρακτηριστικό παράδειγμα της νέας μεθόδου αντιμετώπισης προβλημάτων υπολογισμού εμβαδών κατά τον 17ο αιώνα αποτελεί ο τρόπος με τον οποίο ο J. Wallis ανακάλυψε το 1655 μια νέα αναλυτική έκφραση για το εμβαδόν του κύκλου και τον αριθμό π.

---

[*] Η διατύπωση στο έργο του Αρχιμήδη "Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής" είναι: "παν τμάμα περιεχόμενον υπό ευθείας και ορθογωνίου κώνου τομάς επίτριτον εστι του τριγώνου του βάσιν έχοντος ταν αυτάν και ύψος ίσον τω τμάματι". Ο Αρχιμήδης στην πραγματικότητα εργάστηκε λίγο διαφορετικά αποφεύγοντας την έννοια του απείρου, χρησιμοποίησε πεπερασμένο πλήθος όρων του παραπάνω αθροίσματος και έδειξε ότι το ζητούμενο εμβαδό ισούται με $\frac{4}{3}(OAB)$ αποκλείοντας (με απαγωγή σε άτοπο) τις περιπτώσεις να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από αυτό.

Ο Wallis θεώρησε ένα ημικύκλιο διαμέτρου $AB = 2R$, χώρισε την ακτίνα του OB σε ίσα τμήματα μήκους α και από κάθε σημείο διαίρεσης ύψωσε μια κάθετη (βλ. σχήμα). Όπως είναι γνωστό από την Ευκλείδεια γεωμετρία, κάθε μια από αυτές τις κάθετες είναι μέση ανάλογη των δύο τμημάτων στα οποία χωρίζει τη διάμετρο AB. Π.χ., για την κάθετη $\Gamma\Delta$, που είναι ύψος προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔAB, ισχύει



$$\Gamma\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Gamma B = (R+\alpha)(R-\alpha) = R^2 - \alpha^2$$

δηλ. $\Gamma\Delta = \sqrt{R^2 - \alpha^2}$. Όμοια προκύπτει $EZ = \sqrt{R^2 - 4\alpha^2}$, $H\Theta = \sqrt{R^2 - 9\alpha^2}$ κ.ο.κ. Αφού υπολόγισε με τον τρόπο αυτό όλες τις (πεπερασμένου πλήθους) κάθετες που "εξαντλούν" το τεταρτημόριο OMB, ο Wallis πραγματοποίησε μια "μετάβαση στο άπειρο" με τον εξής συλλογισμό:

"Ο λόγος του αθροίσματος όλων αυτών των καθέτων προς το άθροισμα των μεγίστων τιμών τους (δηλ. των ακτίνων) είναι ίδιος με το λόγο του τεταρτημορίου (το οποίο "εξαντλούν" αυτές οι κάθετες) προς το τετράγωνο με πλευρά την ακτίνα (δηλ. το τετράγωνο ΟΜΛΒ, το οποίο "εξαντλούν" οι ακτίνες-προεκτάσεις των καθέτων)".

Διατυπωμένο σε συμβολική γλώσσα, το συμπέρασμα αυτό του Wallis γίνεται

$$\frac{\sqrt{R^2-0^2}+\sqrt{R^2-\alpha^2}+\sqrt{R^2-4\alpha^2}+\cdots}{R+R+R+\cdots} = \frac{\text{τεταρτημόριο}(OMB)}{\text{τετράγωνο}(OM\Lambda B)} = \frac{\frac{1}{4}\pi R^2}{R^2} = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

Αυτό το μίγμα Γεωμετρίας, Άλγεβρας και "πρωτόγονου" απειροστικού λογισμού, ισοδυναμεί ουσιαστικά με τη σύγχρονη σχέση

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε $R=1$ (δηλ. το μοναδιαίο κύκλο $x^2+y^2=1$) και διαιρέσουμε την ακτίνα (δηλ. το διάστημα $[0,1]$ σε ν ίσα τμήματα μήκους το καθένα $\frac{1}{\nu}$, τότε το πρώτο μέλος της προηγούμενης ισότητας (1) γίνεται

$$\frac{1}{\nu}\left[\sqrt{1-\left(\frac{0}{\nu}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{\nu}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2}\right].$$

Αυτό όμως όπως θα δούμε παρακάτω είναι το κατώτερο άθροισμα της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ (που προκύπτει από την εξίσωση του κύκλου), ως προς την προηγούμενη διαμέριση του διαστήματος $[0,1]$, και το όριό του όταν $\nu \to +\infty$, είναι το

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx .$$

Η έννοια του ολοκληρώματος, όπως και οι άλλες θεμελιώδεις έννοιες της ανάλυσης, έγιναν αντικείμενο συστηματικής κριτικής και ορίστηκαν με λογική αυστηρότητα στη διάρκεια του 19ου αιώνα. Η έννοια του ολοκληρώματος που χρησιμοποιούμε σήμερα στο σχολείο, στηρίζεται στον επόμενο ορισμό του συμβόλου $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ που έδωσε ο B. Riemann το 1854:

"Θεωρούμε μια ακολουθία τιμών $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ που βρίσκονται ανάμεσα στα α και β κατά σειρά μεγέθους και συμβολίζουμε χάριν συντομίας το $x_1-\alpha$ με δ_1, το x_2-x_1 με $\delta_2, \ldots$ το $\beta-x_{\nu-1}$ με δ_ν και τα γνήσια θετικά κλάσματα με ε_i. Τότε η τιμή του αθροίσματος

$$S=\delta_1 f(\alpha+\varepsilon_1\delta_1)+\delta_2 f(x_1+\varepsilon_2\delta_2)+\delta_3 f(x_2+\varepsilon_3\delta_3)+\cdots+\delta_\nu f(x_{\nu-1}+\varepsilon_\nu\delta_\nu)$$

θα εξαρτάται από την εκλογή των διαστημάτων δ_i και των ποσοτήτων ε_i. Αν έχει την ιδιότητα, ανεξαρτήτως της εκλογής των δ_i και ε_i, να τείνει προς ένα σταθερό όριο Α καθώς όλα τα δ_i γίνονται απειροελάχιστα, τότε η τιμή αυτή ονομάζεται $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Αν δεν έχει αυτή την ιδιότητα, τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δεν έχει κανένα νόημα".