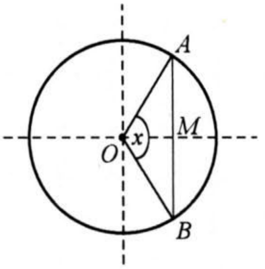
ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η έννοια της συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης, ως έκφραση μιας εξάρτησης ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένες ποσότητες, εμφανίζεται μ' έναν υπονοούμενο τρόπο ήδη από την αρχαιότητα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι πίνακες χορδών της "Αλμαγέστης", του Έλληνα μαθηματικού και αστρονόμου της αλεξανδρινής περιόδου Κλαύδιου Πτολεμαίου. Στη μια στήλη αυτών των πινάκων υπάρχουν τα μήκη των τόξων ενός κύκλου και στην άλλη τα μήκη των αντίστοιχων χορδών. Χρησιμοποιώντας την έννοια του ημιτόνου στον μοναδιαίο κύκλο μπορούμε να εκφράσουμε αναλυτικά τη "συνάρτηση" των πινάκων του Πτολεμαίου ως εξής:

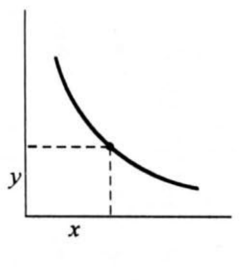


$$\text{χορδή τόξου } (x) = AB = 2AM = 2\text{ημ}\frac{x}{2}.$$

Με τον ίδιο υπονοούμενο τρόπο η έννοια της συνάρτησης εμφανίζεται στους λογαριθμικούς πίνακες που κατασκευάστηκαν στις αρχές του 17ου αιώνα.

Τα γεγονότα που έδωσαν αποφασιστική ώθηση στην ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης ήταν η δημιουργία της Άλγεβρας (χρήση γραμμάτων και ειδικών συμβόλων για την αναπαράσταση μαθηματικών πράξεων, σχέσεων, αγνώστων κ.λπ.) και της αναλυτικής γεωμετρίας (χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού σε γεωμετρικά προβλήματα). Ο Descartes, στο έργο του "La Geometrie" (1637), παρουσιάζοντας τη μέθοδο προσδιορισμού μιας καμπύλης από μια εξίσωση ως προς x και y (τα οποία εκφράζουν τα ευθύγραμμα τμήματα-συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης), περιέγραψε για πρώτη φορά τη δυνατότητα αναλυτικής αναπαράστασης μιας σχέσης εξάρτησης ανάμεσα σε μεταβλητές ποσότητες:

"Αν λοιπόν πάρουμε διαδοχικά ένα άπειρο πλήθος διαφορετικών τιμών για το τμήμα y τότε θα προκύψει ένα άπειρο πλήθος τιμών για το τμήμα x και επομένως μια απειρία διαφορετικών σημείων, με τη βοήθεια των οποίων μπορεί να σχεδιαστεί η ζητούμενη καμπύλη".



Ο όρος "συνάρτηση" (από το λατινικό ρήμα fungor, που σημαίνει εκτελώ, λειτουργώ) εμφανίστηκε για πρώτη φορά το 1673 σ' ένα χειρόγραφο του Leibniz με τίτλο "Η αντίστροφη μέθοδος των εφαπτομένων ή περί συναρτήσεων" (Methodus tangentium inversa, seu de functionibus), στο οποίο εξετάζεται ο υπολογισμός των τεταγμένων y των σημείων μιας καμπύλης όταν είναι γνωστή κάποια ιδιότητα των αντίστοιχων εφαπτομένων. Ο όρος αυτός άρχισε να αποκτά από εκείνη την εποχή μια ιδιαίτερη σημασία για την αναπαράσταση ποσοτήτων που εξαρτώνται από άλλες μεταβλητές ποσότητες, ιδιαίτερα όταν η εξάρτηση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή μιας αναλυτικής έκφρασης. Ο J. Bernoulli έδωσε το 1718 τον επόμενο γενικό ορισμό:

"Ονομάζω συνάρτηση ενός μεταβλητού μεγέθους μια ποσότητα που σχηματίζεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτό το μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές".

Η αντίληψη της συνάρτησης ως "αναλυτικής έκφρασης" κυριάρχησε για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, στη διάρκεια του οποίου η μαθηματική ανάλυση ορίζονταν ως η γενική επιστήμη των μεταβλητών και των συναρτήσεών τους. Ο επόμενος ορισμός, που ταυτίζει την έννοια της συνάρτησης με αυτήν της "αναλυτικής έκφρασης", δόθηκε από τον L. Euler το 1748, στο έργο του "Εισαγωγή στην απειροστική ανάλυση".

"Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας ονομάζεται μια αναλυτική έκφραση που σχηματίζεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτή τη μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες".

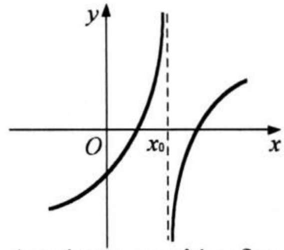
Η παραπέρα εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης προήλθε κυρίως από την προσπάθεια μαθηματικής ερμηνείας φυσικών προβλημάτων, όπως π.χ. το πρόβλημα μιας παλλόμενης χορδής, στερεωμένης στα δυο άκρα της. Σ' αυτό το πρόβλημα, που απασχόλησε ιδιαίτερα τους επιστήμονες στη διάρκεια του 18ου αιώνα, ζητείται να προσδιοριστεί μια συνάρτηση της μορφής $y = f(x,t)$ που περιγράφει το σχήμα της χορδής σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t. Το είδος όμως των συναρτήσεων που υπεισέρχονται σ' αυτό το ζήτημα είναι τόσο γενικό, που ανάγκασε τους μαθηματικούς να αναθεωρήσουν την καθιερωμένη αντίληψη ότι κάθε συνάρτηση ταυτίζεται με μια αναλυτική έκφραση και να αναζητήσουν γενικότερους ορισμούς. Ο L. Euler, ήδη από το 1755 διατύπωσε ένα τέτοιο ορισμό, απαλλαγμένο από την άμεση αναφορά στην έννοια της "αναλυτικής έκφρασης".

"Αν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από άλλες ποσότητες με τέτοιο τρόπο ώστε, όταν οι τελευταίες αλλάζουν συμβαίνει το ίδιο και με τις πρώτες, τότε οι πρώτες ονομάζονται συναρτήσεις των τελευταίων. Αυτός ο ορισμός είναι πολύ ευρύς και περιλαμβάνει κάθε μέθοδο με την οποία μια ποσότητα θα μπορούσε να προσδιοριστεί από άλλες. Αν λοιπόν το x υποδηλώνει μια μεταβλητή ποσότητα, τότε όλες οι ποσότητες που εξαρτώνται από το x με οποιοδήποτε τρόπο ή προσδιορίζονται από αυτό, ονομάζονται συναρτήσεις του x".

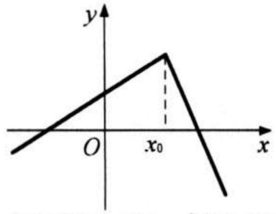
Οι νέες αυτές αντιλήψεις οδήγησαν βαθμιαία στην έννοια της συνάρτησης ως αυθαίρετης αντιστοιχίας ανάμεσα στα στοιχεία δυο συνόλων, που δεν ακολουθεί υποχρεωτικά κάποιο "νόμο". Ο J. Fourier, το 1822, επισήμανε ρητά αυτό το σημείο με την εξής παρατήρηση: *"Γενικά, η συνάρτη-*

ση $f(x)$ *παριστάνει μια διαδοχή τιμών ή τεταγμένων, καθεμιά από τις ο-ποίες είναι αυθαίρετη. Αν δοθεί μια απειρία τιμών στην τετμημένη x, θα υπάρχουν ίσου πλήθους τεταγμένες* $f(x)$. *Όλες έχουν πραγματικές αριθμητικές τιμές, θετικές ή αρνητικές ή μηδέν. Δεν προϋποθέτουμε ότι αυτές οι τεταγμένες υπόκεινται σ' ένα κοινό νόμο· διαδέχονται η μια την άλλη με οποιοδήποτε τρόπο και καθεμιά από αυτές δίνεται σαν να ήταν μια μοναδική ποσότητα".*

Η έννοια της συνέχειας



Ασυνέχεια στο x_0 λόγω διακοπής της καμπύλης σ'αυτό το σημείο



Ασυνέχεια στο x_0 λόγω μεταβολής της αναλυτικής έκφρασης σ'αυτό το σημείο.

Την περίοδο που η έννοια της συνάρτησης ταυτίζονταν με αυτήν της "αναλυτικής έκφρασης", υπήρχαν δυο διαφορετικές αντιλήψεις για την έννοια της συνέχειας. Η μία από αυτές, με καθαρά γεωμετρική προέλευση, εξέφραζε την ιδιότητα μιας καμπύλης να μη παρουσιάζει "διακοπές"· η άλλη, με προέλευση κυρίως από τη φυσική, εξέφραζε την ιδιότητα ενός φαινομένου να ακολουθεί τον ίδιο "νόμο", την ιδιότητα μιας συνάρτησης να διατηρεί την ίδια αναλυτική έκφραση σ' ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. Σ' αυτήν την τελευταία αντίληψη περί συνέχειας άσκησε έντονη κριτική ο A. L. Cauchy το 1844, σημειώνοντας τα εξής: *"Στα έργα των Euler και Lagrange, μια συνάρτηση ονομάζεται συνεχής ή ασυνεχής ανάλογα με το αν οι διαφορετικές τιμές αυτής της συνάρτησης υπόκεινται ή όχι στον ίδιο νόμο, προκύπτουν ή όχι από μια μοναδική εξίσωση. Όμως αυτός ο ορισμός πολύ απέχει από το να θεωρηθεί μαθηματικά ακριβής· γιατί αν οι διαφορετικές τιμές μιας συνάρτησης εξαρτώνται από δυο ή περισσότερες διαφορετικές εξισώσεις, τίποτα δεν μας εμποδίζει να μειώσουμε τον αριθμό αυτών των εξισώσεων ή ακόμη και να τις αντικαταστήσουμε από μια απλή εξίσωση, της οποίας η ανάλυση θα μας έδινε όλες τις υπόλοιπες. Επομένως, αν κανείς θεωρήσει τον ορισμό των Euler και Langrange εφαρμόσιμο σε όλα τα είδη των συναρτήσεων, τότε μια απλή αλλαγή του συμβολισμού είναι συχνά αρκετή για να μετασχηματίσει μια συνεχή συνάρτηση σε ασυνεχή και αντίστροφα. Έτσι π.χ., αν το x συμβολίζει μια πραγματική μεταβλητή, τότε η συνάρτηση που ισούται με* $+x$ *ή* $-x$, *ανάλογα με το αν η μεταβλητή x είναι θετική ή αρνητική, πρέπει για το λόγο αυτό να τοποθετηθεί στην κλάση*

των ασυνεχών συναρτήσεων· όμως η ίδια συνάρτηση θα μπορούσε να θεωρηθεί ως συνεχής όταν γραφεί στη μορφή $\sqrt{x^2}$ [(1)].
Έτσι, ο χαρακτήρας της συνέχειας των συναρτήσεων, θεωρούμενος από το σημείο όπου οι γεωμέτρες σταμάτησαν για πρώτη φορά, είναι ασαφής και αβέβαιος. Η αβεβαιότητα όμως θα εξαφανιστεί, αν στη θέση του ορισμού του Euler αντικαταστήσουμε αυτόν που έχω δώσει στο κεφάλαιο II του έργου μου "Αλγεβρική ανάλυση" ... ".

Ο ορισμός, στον οποίο αναφέρεται εδώ ο Cauchy, αποτελεί ουσιαστικά την πρώτη απόπειρα μελέτης της έννοιας της συνέχειας με λογική αυστηρότητα. Αποσυνδέοντας αυτήν την έννοια από κάθε γεωμετρική εποπτεία και εξάρτηση από την έννοια της "αναλυτικής έκφρασης", τη μετασχημάτισε σε μια καθαρά αριθμητική ιδιότητα των συναρτήσεων, που μπορεί να γίνει αντικείμενο λογισμού. Ο ορισμός αυτός του Cauchy, που δόθηκε το 1821, έχει ως εξής: (έναν παρόμοιο ορισμό είχε δώσει και ο B. Bolzano το 1817).

"Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση της μεταβλητής x και ας υποθέσουμε ότι για κάθε τιμή του x σ' ένα δοσμένο διάστημα η συνάρτηση αυτή έχει πάντοτε μια μοναδική και πεπερασμένη τιμή. Αν δώσουμε στην μεταβλητή x μια απειροελάχιστη αύξηση α, η συνάρτηση θα αυξηθεί κατά τη διαφορά $f(x+\alpha)-f(x)$, η οποία εξαρτάται από τη νέα μεταβλητή α και την τιμή που είχε το x. Σ' αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση $f(x)$ θα ονομάζεται ***συνεχής*** *στο διάστημα της μεταβλητής x, αν για κάθε τιμή του x σ' αυτό το διάστημα, η απόλυτη τιμή της διαφοράς $f(x+\alpha)-f(x)$ μικραίνει επ' άπειρον μαζί μ' αυτήν του α. Με άλλα λόγια, η $f(x)$ θα παραμένει συνεχής ως προς x, αν μια απειροελάχιστη αύξηση της μεταβλητής παράγει πάντοτε μια απειροελάχιστη αύξηση της ίδιας της συνάρτησης".*

Η έννοια του ορίου

Η έννοια της συνέχειας καθώς και ορισμένες άλλες βασικές έννοιες της ανάλυσης που θα γνωρίσουμε στα επόμενα κεφάλαια (όπως π.χ. η παράγωγος και το ολοκλήρωμα) περιείχαν, στα πρώτα στάδια της εξέλιξής τους, ορισμένες ασάφειες, που οφείλονταν κυρίως στην αδυναμία των μαθηματικών να διαπραγματευθούν με λογική αυστηρότητα την έννοια του απείρως μικρού και του απείρως μεγάλου. Αυτή η αδυναμία οδηγούσε πολλούς να αμφισβητούν τα θεμέλια πάνω στα οποία στηρίζονταν το οικοδόμημα της μαθηματικής ανάλυσης και να συνδέουν τα εντυπωσιακά αποτελέσματά της με ορισμένες μεταφυσικές ερμηνείες.
Οι μαθηματικοί προσπάθησαν να ξεπεράσουν αυτές τις δυσκολίες εισάγοντας την ιδέα του ορίου, με την οποία, αρχικά, εκφράζονταν η δυνατότητα μιας μεταβαλλόμενης ποσότητας να προσεγγίζει επ' άπειρον μια σταθερή ποσότητα χωρίς στην πραγματικότητα να τη φτάνει ποτέ. Ο d'

[(1)] Είναι φανερό ότι ο Cauchy χρησιμοποιεί εδώ, χωρίς να την ονομάζει, τη συνάρτηση απόλυτη τιμή.

Alembert όρισε το 1765 αυτήν την έννοια στην "Εγκυκλοπαίδεια" του Diderot ως εξής:

*"Ένα μέγεθος ονομάζεται **όριο** ενός άλλου όταν το δεύτερο μπορεί να προσεγγίζει το πρώτο σε μια απόσταση οσοδήποτε μικρή, αν και ένα μέγεθος δεν μπορεί να ξεπερνά ποτέ το μέγεθος που προσεγγίζει· έτσι ώστε η διαφορά μιας τέτοιας ποσότητας από το όριό της να είναι εντελώς αμελητέα".*

Σύμφωνα λοιπόν μ' αυτόν τον ορισμό, που περικλείει την έννοια της κίνησης ως μια διαδικασία προσέγγισης, ο αριθμός 2 είναι το όριο της ακολουθίας 1,9 1,99 1,999 1,9999 ..., αλλά όχι όριο ακολουθίας 1,9 1,99 2 2 ... (γιατί αυτή "φτάνει" το 2), ούτε όριο της ακολουθίας 1,9 2,01 1,9999 2,0001 ... (γιατί αυτή ξεπερνά το 2).
Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν την έννοια αυτή του ορίου φαίνεται χαρακτηριστικά στο επόμενο παράδειγμα, στο οποίο ο S.F. Lacroix αποδεικνύει το 1810 ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x}{x+\alpha}=\alpha$:

"Έστω ότι δίνεται η συνάρτηση $\dfrac{\alpha x}{x+\alpha}$, στην οποία υποθέτουμε ότι το x αυξάνεται θετικά χωρίς τέλος. Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με το x, βρίσκουμε $\dfrac{\alpha}{1+\dfrac{\alpha}{x}}$, ένα αποτέλεσμα που δείχνει καθαρά ότι η συνάρτηση θα παραμένει πάντοτε μικρότερη από το α αλλά θα προσεγγίζει συνέχεια αυτήν την τιμή, αφού το μέρος $\dfrac{\alpha}{x}$ του παρονομαστή μειώνεται όλο και περισσότερο και μπορεί να μειωθεί όσο θέλουμε. Η διαφορά ανάμεσα στο δοσμένο κλάσμα και την τιμή α εκφράζεται ως

$$\alpha-\frac{\alpha x}{x+\alpha}=\frac{\alpha^2}{x+\alpha}$$

και επομένως γίνεται ολοένα και πιο μικρή, όσο το x γίνεται μεγαλύτερο, και μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε ποσότητα, οσοδήποτε μικρή. Συνεπώς, το δοσμένο κλάσμα μπορεί να προσεγγίζει το α όσο κοντά θέλουμε: άρα το α είναι το όριο της συνάρτησης $\dfrac{\alpha x}{x+\alpha}$ ως προς την αόριστη αύξηση του x".

Για να τυποποιήσουμε αυτήν την μακροσκελή διαδικασία, οι μαθηματικοί προσπάθησαν να αποσυνδέσουν την έννοια του ορίου από την έννοια της κίνησης και να την ορίσουν με καθαρά αριθμητικούς όρους, έτσι ώστε να γίνει ένα αντικείμενο μαθηματικού λογισμού. Το αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας υπήρξε ο σημερινός "στατικός" ορισμός με τη βοήθεια των ανισοτήτων και της απόλυσης τιμής, που διατυπώθηκε από τον Weierstrass στα μέσα του 19ου αιώνα. Με αυτόν τον ορισμό, η έννοια του ορίου απογυμνώθηκε από κάθε στοιχείο εποπτείας αλλά έγινε έτσι δυνατό να αποδειχθούν με λογική αυστηρότητα οι ιδιότητες των ορίων και να τυποποιηθεί η διαδικασία υπολογισμού τους.