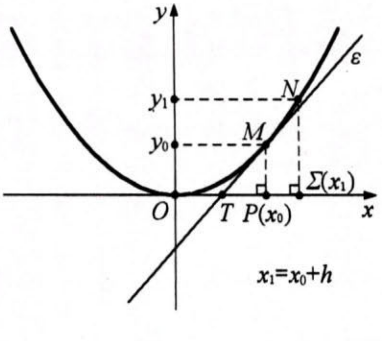
ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η έννοια της παραγώγου

Οι αρχαίοι Έλληνες ονόμαζαν εφαπτομένη μιας καμπύλης την ευθεία που έχει ένα μόνο κοινό σημείο μ' αυτήν, χωρίς να την τέμνει και την κατασκεύαζαν με βάση γεωμετρικές ιδιότητες που απορρέουν απ' αυτόν τον ορισμό. Έτσι ήταν γνωστός ο τρόπος κατασκευής εφαπτομένων στον κύκλο και τις κωνικές τομές (έλλειψη, παραβολή, υπερβολή). Επίσης, με προσφυγή σε κινηματικές μεθόδους, ο Αρχιμήδης είχε επινοήσει μέθοδο κατασκευής της εφαπτομένης μιας καμπύλης που είναι σήμερα γνωστή ως "έλικα του Αρχιμήδη".
Η επόμενη εξέλιξη στο ζήτημα αυτό έγινε στις αρχές του 17ου αιώνα, όταν άρχισε η συστηματική εφαρμογή αλγεβρικών μεθόδων στη γεωμετρία. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει τον τρόπο με τον οποίο η Άλγεβρα εφαρμόζεται στον προσδιορισμό της εφαπτομένης μιας παραβολής.



Έστω $y=f(x)=x^2$ η εξίσωση μιας παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων και $M(x_0,y_0)$ ένα σημείο της, στο οποίο ζητείται να κατασκευαστεί μια εφαπτομένη ε. Η κατασκευή αυτή μπορεί να γίνει αν προσδιορίσουμε ένα άλλο χαρακτηριστικό σημείο της ε, όπως π.χ. το σημείο T στο οποίο τέμνει τον άξονα των τετμημένων.

Θεωρούμε ένα άλλο σημείο της παραβολής, το $N(x_1,y_1)$, πολύ γειτονικό του M, τέτοιο ώστε $x_1=x_0+h$ (το h θεωρείται εδώ μια απειροελάχιστη μεταβολή του x_0). Στην περίπτωση αυτή τα ορθογώνια τρίγωνα MPT και $N\Sigma T$ μπορούν να θεωρηθούν κατά προσέγγιση όμοια και άρα θα ισχύει κατά προσέγγιση η αναλογία $\frac{N\Sigma}{MP}=\frac{\Sigma T}{TP}$. Αν θέσουμε $TP=s$, τότε διαδοχικά θα ισχύει:

$$\frac{y_1}{y_0}=\frac{s+h}{s} \quad \text{ή} \quad y_1=y_0\left(1+\frac{h}{s}\right) \quad \text{ή} \quad y_1-y_0=y_0\frac{h}{s} \quad \text{ή} \quad \frac{y_1-y_0}{h}=\frac{y_0}{s}. \qquad (1)$$

Το πρώτο μέλος αυτής της κατά προσέγγιση ισότητας γράφεται:

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}=\frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h}=2x_0+h$$

και έτσι η (1) γίνεται $2x_0+h=\frac{y_0}{s}$. Αν τώρα θέσουμε, όπως οι μαθηματικοί του 17ου αιώνα, $h=0$ βρίσκουμε από την τελευταία ότι $2x_0=\frac{y_0}{s}$ ή $s=\frac{y_0}{2x_0}$. Γνωρίζοντας λοιπόν το σημείο επαφής $M(x_0,y_0)$,. προσδιορίζουμε από την τελευταία το μήκος $TP=s$ που μας δίνει αμέσως το σημείο T. Η ευθεία MT είναι η ζητούμενη εφαπτομένη της παραβολής. Η προηγούμενη διαδικασία ήταν ένας από τους δρόμους που οδήγησαν ιστορικά, στην έννοια της παραγώγου.

Κανόνες παραγώγισης

Στο δεύτερο μισό του 17ου αιώνα, οι μαθηματικοί είχαν κατορθώσει να μετασχηματίσουν όλη τη μακροσκελή διαδικασία παραγώγισης σε εφαρμογή ορισμένων κανόνων και τύπων, με τη βοήθεια κατάλληλα επιλεγμένων συμβόλων. Πρωτοπόροι προς αυτήν την κατεύθυνση υπήρξαν οι I. Newton και ο G. Leibniz. O Leibniz συμβόλιζε την απειροελάχιστη μεταβολή μιας ποσότητας x με dx (διαφορικό του x)· έτσι, π.χ. για τη συνάρτηση $y=x^2$ του προηγούμενου παραδείγματος, η αντίστοιχη μεταβολή του y (διαφορικό του y) ήταν:

$$dy=d(x^2)=(x+dx)^2-x^2=x^2+2xdx+(dx)^2-x^2=2xdx+(dx)^2.$$

Παραλείποντας την πολύ μικρή (συγκρινόμενη με τις άλλες) ποσότητα $(dx)^2$ προέκυπτε η $dy=2xdx$ (εδώ η παράγωγος $2x$ ονομάζονταν "διαφορικός συντελεστής") και τελικά η $\frac{dy}{dx}=2x$, ένας συμβολισμός που διατηρείται μέχρι σήμερα, χωρίς όμως να έχει νόημα πηλίκου. Με τον τρόπο αυτό ο Leibniz απέδειξε το 1677 τον κανόνα για τον υπολογισμό της μεταβολής του γινομένου δύο μεταβλητών x και y, που αποτελεί μια "πρωτόγονη" μορφή του σημερινού κανόνα της παραγώγου ενός γινομένου συναρτήσεων

$$\begin{aligned} d(xy) &= (x+dx)(y+dy)-xy \\ &= xy+xdy+ydx+dxdy-xy \\ &= xdy+ydx+dxdy. \end{aligned}$$

Παραλείποντας και εδώ την πολύ μικρή ποσότητα $dxdy$, παίρνουμε τη σχέση

$$d(xy)=xdy+ydx.$$

Με την εισαγωγή και καθιέρωση αυτών των κανόνων και συμβολισμών, η έννοια της παραγώγου εξελίχθηκε σ' ένα εξαιρετικά αποτελεσματικό εργαλείο και διεύρυνε σε μεγάλο βαθμό τις εφαρμογές της μαθηματικής ανάλυσης. Παράλληλα όμως, οι ασάφειες που επισημάναμε αποτελούσαν μια διαρκή πρόκληση για τους μαθηματικούς που αντιμετώπιζαν με κριτικό πνεύμα τα θεμέλια της επιστήμης τους. Ο πρώτος αυστηρός ορισμός αυτής της έννοιας, που στηρίζεται στην έννοια του ορίου, δόθηκε για πρώτη φορά το 1823 από τον A.L. Cauchy:

"Όταν η συνάρτηση $y=f(x)$ παραμένει συνεχής σ' ένα διάστημα της μεταβλητής x και δοθεί σ' αυτή τη μεταβλητή μια τιμή που ανήκει σ' αυτό το διάστημα, τότε κάθε απειροελάχιστη αύξηση της μεταβλητής παράγει μια απειροελάχιστη αύξηση της συνάρτησης. Συνεπώς, αν τεθεί $\Delta x=i$, τότε οι δυο όροι του πηλίκου διαφορών

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

θα είναι απειροελάχιστες ποσότητες. Αλλά ενώ αυτοί οι δυο όροι θα προσεγγίζουν επ' άπειρον και ταυτόχρονα το όριο μηδέν, το πηλίκο μπορεί να συγκλίνει προς κάποιο άλλο όριο, θετικό ή αρνητικό, Αυτό το όριο, όταν υπάρχει έχει μια ορισμένη τιμή για κάθε συγκεκριμένο x, αλλά μεταβάλλεται μαζί με το x.

Η μορφή της νέας συνάρτησης που θα εκφράζει το όριο του λόγου

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

θα εξαρτάται από τη μορφή της δοσμένης συνάρτησης $y=f(x)$.

*Για να ξεχωρίσουμε αυτήν την εξάρτηση, δίνουμε στη νέα συνάρτηση το όνομα **παράγωγος συνάρτηση** και τη συμβολίζουμε, με τη βοήθεια ενός τόνου, y' ή $f'(x)$ ".*

Με αφετηρία αυτόν τον ορισμό, ο Cauchy υπολόγισε τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων και απέδειξε τους κανόνες της παραγώγισης. Π.χ. για τον ιδιαίτερα σημαντικό κανόνα της παραγώγου μιας σύνθετης συνάρτησης, έδωσε την ακόλουθη απόδειξη:

"Έστω z μια δεύτερη συνάρτηση του x, συνδεόμενη με την πρώτη $y=f(x)$ μέσω του τύπου $z=F(y)$. Η z ή $F[f(x)]$ είναι αυτή που ονομάζεται συνάρτηση μιας συνάρτησης της μεταβλητής x και αν οι απειροελάχιστες και ταυτόχρονες αυξήσεις των x, y και z συμβολιστούν με Δx, Δy, Δz αντίστοιχα, τότε θα είναι

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta x}=\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Από αυτήν, περνώντας στα όρια, έχουμε

$$z'=F'(y)\cdot y'=F'[f(x)]\cdot f'(x)\text{ ''}^{(*)}$$

*) Ένα αδύνατο σημείο αυτής της απόδειξης, που αφορά την ισότητα (1), είναι ότι για μικρές, μη μηδενικές τιμές του Δx, μπορεί να ισχύει $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=0$.