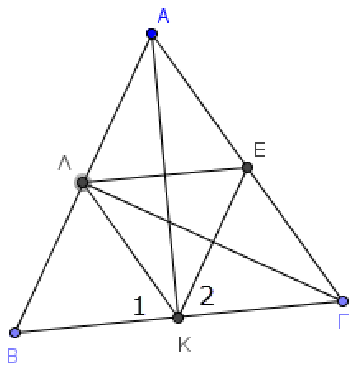
Θέμα 4 **GI_A_GEO_4_6876**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΒ (ΑΓ=ΓΒ). Φέρουμε τα ύψη του ΑΚ και ΓΛ. Αν Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ. (Μονάδες 15)

Λύση:



α) Το τρίγωνο ΑΚΓ είναι ορθογώνιο και η ΚΕ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΑΓ, άρα $\mathrm{KE}=\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}$ **(1)**

Το τρίγωνο ΛΒΓ είναι ορθογώνιο και η ΚΛ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ, άρα $\mathrm{K\Lambda}=\frac{1}{2}\mathrm{B\Gamma}$ **(2)** .

Επειδή ΒΓ = ΓΑ (δεδομένο) από (1) και (2) έχουμε ΚΛ = ΚΕ. Άρα το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές.

β) Το τρίγωνο ΑΚΓ είναι ορθογώνιο και η ΚΕ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΑΓ, άρα $\mathrm{KE}=\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{\Gamma E}$ επομένως $\hat{\mathrm{K}}_2=\hat{\Gamma}$ **(3)**

Το τρίγωνο ΛΒΓ είναι ορθογώνιο και η ΚΛ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ, άρα $\mathrm{K\Lambda}=\frac{1}{2}\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{BK}$ επομένως $\hat{\mathrm{K}}_1=\hat{\mathrm{B}}$ **(4)** .

Όμως $\begin{cases}\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=180\\ \hat{\mathrm{K}}_1+\hat{\mathrm{K}}_2+\Lambda\hat{\mathrm{K}}\mathrm{E}=180\end{cases} \overset{(3),(4)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=180\\ \hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}+\Lambda\hat{\mathrm{K}}\mathrm{E}=180\end{cases} \Leftrightarrow \hat{\mathrm{A}}=\Lambda\hat{\mathrm{K}}\mathrm{E}$ **(5)**

Αλλά ΒΓ = ΓΑ (δεδομένο) άρα $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}$ **(6).**

Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε $\Lambda\hat{\mathrm{K}}\mathrm{E}=\hat{\mathrm{B}}$ επομένως η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ.

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός