

Θέμα 4

GI_A_GEO_4_4555

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ του ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο με το ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο με το ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη ΒΓ και το σημείο Α). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

β) Η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΕ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)

γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:

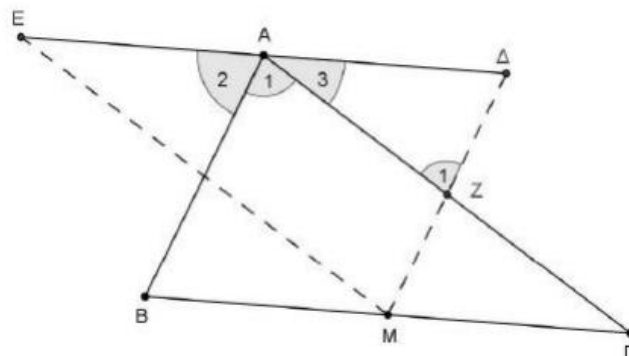
$$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1 \text{ (εντός εναλλάξ των } AB//M\Delta \text{ που τέμνονται από } AZ)$$

$$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{Z} = \hat{A}_2 \text{ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των } AB//M\Delta \text{ που τέμνονται από } \Delta E)$$

Όμως $\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + \hat{A}\hat{\Delta}\hat{Z} = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ). Άρα σύμφωνα

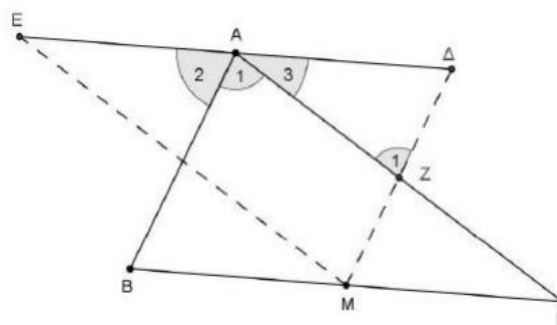
με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$. Οπότε Δ,Ε,Α συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή; (Μονάδες 6)



Λύση:

α) $M\Delta \parallel AB$ άρα το $ABM\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα και $A\Delta \parallel MG$ (1)
 $ME \parallel AG$ άρα το $AGME$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα και $AE \parallel MB$ (2)
 Από (1) και (2) θα έπρεπε $AE \parallel A\Delta$ αλλά έχουν το A κοινό σημείο οπότε τα A, Δ και E είναι συνευθειακά.



β) Έχουμε $AB = M\Delta$, $AG = ME$ και $B\Gamma = BM + M\Gamma = A\Delta + AE = \Delta E$ άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $M\Delta E$ είναι ίσα και έχουν ίσες περιμέτρους.

γ) Ο μαθητής χαρακτηρίζοντας τις γωνίες \hat{A}_2 και $\hat{A}\hat{\Delta}E$ εντός εκτός και επί τ' αυτά των $AB \parallel M\Delta$ καθώς τέμνονται από την ΔE , προεξόφλησε ότι τα Δ και E είναι συνευθειακά. Δηλαδή δέχτηκε ότι είναι συνευθειακά για να δείξει ότι είναι συνευθειακά !!!

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός