Θέμα 4 GI_A_GEO_4_2789

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο η εξωτερική του γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας $\hat{A}$. Από την κορυφή Α διέρχεται ημιευθεία Αx // ΒΓ στο ημιεπίπεδο (ΑΒ, Γ). Στην ημιευθεία Αx θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ=ΒΓ.

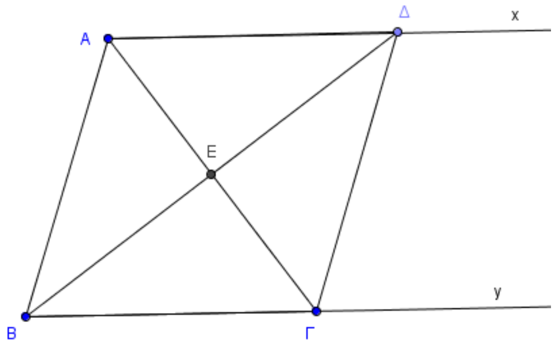
Να αποδείξετε ότι:

α) Η ΒΔ διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 7)

β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

Λύση:



α) ΑΔ // = ΒΓ (κατασκευή). Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ, διχοτομούνται το σημείο Ε είναι το μέσον του ΑΓ.

γ) Η $\Gamma_{\varepsilon\xi}$ (εξωτερική γωνία του ΑΒΓ) είναι:

$\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = A\hat{\Gamma}y = \hat{A} + \hat{B}$ αλλά και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 2\hat{A}$ (δεδομένο) άρα $2\hat{A} = \hat{A} + \hat{B} \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B}$ (1)

οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΓΒ = ΓΑ)

β) Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΔΓ//ΑΒ επομένως $B\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta$ (2) ως εντός εναλλάξ (ΔΓ//ΑΒ καθώς τέμνονται από την ΑΓ).

Επίσης $\Delta\hat{\Gamma}y = \hat{B}$ (3) ως εντός εκτός και επί τα αυτά (ΑΒ//ΓΔ καθώς τέμνονται από την ΒΓ). Από τις σχέσεις και λόγω της (1), (2) και (3) έχουμε $A\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}y$ άρα η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\Gamma_{\varepsilon\xi}$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός