
ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 1 = 0 \quad (1), \quad \text{όπου } \lambda \in \mathbf{R}.$$

- (i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου ζητείται να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.
- (ii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. Ποιά είναι η εξίσωση της κοινής χορδής όλων αυτών των κύκλων;

2. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ και $C_2 : (x-2)^2 + y^2 = 2^2$ και η ευθεία $y = \lambda x + \beta$, όπου $\lambda, \beta \in \mathbf{R}$.

- (i) Ποιες είναι οι αποστάσεις των κέντρων των κύκλων C_1 και C_2 από την ευθεία;
- (ii) Για ποιες τιμές των λ και β η ευθεία εφάπτεται και στους δύο κύκλους;
- (iii) Να αποδείξετε ότι οι κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 τέμνονται πάνω στον άξονα $x'x$ και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60° .

3. Μια ευθεία $y = \lambda x + \beta$, με $\lambda \neq 0$, τέμνει την παραβολή $y^2 = 4x$ σε δύο σημεία A και B .

- (i) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου M του AB είναι $\left(\frac{2-\lambda\beta}{\lambda^2}, \frac{2}{\lambda} \right)$.
- (ii) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία βρίσκεται το M , όταν
 - (α) $\lambda=1$ και το β μεταβάλλεται
 - (β) $\beta=0$ και το λ μεταβάλλεται.

4. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, με $a > b > 0$ και το σημείο $\Sigma(0, 2b)$. Μια ευθεία με

συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το σημείο Σ και τέμνει τις εφαπτόμενες, στα άκρα του μεγάλου άξονα της έλλειψης, στα σημεία M και M' .

- (i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο MM' συναρτήσει του λ .
- (ii) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbf{R}$ ο κύκλος αυτός διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης;

5. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη και εφάπτεται στην ευθεία $y = x + 1$.
6. Έστω τα διανύσματα $\vec{OA}_1 = (4, 0)$ και $\vec{OA}_2 = (1, 0)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Αν τα διανύσματα αρχίσουν, συγχρόνως, να περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα αλλά με αντίθετη φορά, να αποδείξετε ότι το πέρας M της συνισταμένης τους διαγράφει έλλειψη.
7. Δίνονται οι ημιευθείες $\delta_1 : y = 2x$ και $\delta_2 : y = -2x$, $x \in (0, +\infty)$ και μια ευθεία ε η οποία τις τέμνει στα σημεία M_1 και M_2 αντιστοίχως.
- (i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των M_1 και M_2 συναρτήσει των συντεταγμένων του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2 .
- (ii) Να αποδείξετε ότι όταν η ευθεία ε κινείται, έτσι ώστε το τρίγωνο OM_1M_2 να έχει σταθερό εμβαδόν και ίσο με 2, τότε το M κινείται στον ένα κλάδο μίας σταθερής υπερβολής.
8. Δίνονται οι ελλείψεις $C_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $C_2 : a^2x^2 + \beta^2y^2 = 1$ με $0 < \beta < a$. Η ημιευθεία $y = (\varepsilon\phi\theta)x$, $x > 0$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ τέμνει την C_1 στο σημείο $\Gamma_1(x_1, y_1)$ και την C_2 στο σημείο $\Gamma_2(x_2, y_2)$.
Αν λ_1 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_1 στο σημείο Γ_1 και λ_2 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_2 στο σημείο Γ_2 , να αποδείξετε ότι το γινόμενο $\lambda_1\lambda_2$ είναι ίσο με $(\varepsilon\phi\theta)^{-2}$.
9. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.
- (i) Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο που η διχοτόμος του πρώτου τεταρτημόριου τέμνει την έλλειψη έχει κλίση $-\frac{1}{2}$. Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.
- (ii) Έστω M το σημείο του πρώτου τεταρτημόριου στο οποίο η ευθεία $y = \lambda x$, $\lambda > 0$ τέμνει την παραπάνω έλλειψη. Αν μ είναι η κλίση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο M , τότε να εκφράσετε το γινόμενο $\lambda\mu$ ως συνάρτηση των ημισαζόνων a, β .

10. (i) Δίνονται ένας κύκλος C_1 με κέντρο K και ακτίνα R και μια ευθεία ε που δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο C_1 . Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων C , που εφάπτονται της ε και του κύκλου C_1 εξωτερικά, ανήκουν σε σταθερή παραβολή.
- (ii) Δίνονται δύο κύκλοι C_1 και C_2 , με κέντρα K_1 και K_2 και ακτίνες R_1 και R_2 αντιστοίχως, από τους οποίους ο C_2 είναι εσωτερικός του C_1 . Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων C , που εφάπτονται εσωτερικά του C_1 και εξωτερικά του C_2 , ανήκουν σε σταθερή έλλειψη.
- (iii) Δίνονται δύο κύκλοι C_1 και C_2 , με κέντρα K_1 και K_2 και ακτίνες R_1 και R_2 , αντιστοίχως, που βρίσκονται ο ένας εκτός του άλλου. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα του κύκλου C που εφάπτονται εξωτερικά και των δύο κύκλων C_1 και C_2 ανήκουν σε κλάδο σταθερής υπερβολής.

11. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και το σημείο της $M(\alpha \sin \varphi, \beta \eta \mu \varphi)$.

- (i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο M .
- (ii) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών E και E' από την εφαπτομένη είναι σταθερό.
- (iii) Για ποια τιμή του φ το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζει η εφαπτομένη με τους άξονες γίνεται ελάχιστο;