ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ, μ με $|\kappa|+|\lambda|+|\mu| \neq 0$, τέτοιοι, ώστε

$$\kappa+\lambda+\mu=0 \quad \text{και} \quad \kappa\cdot\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}+\mu\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0},$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά και αντιστρόφως.

2. Αν για το σημείο M του επιπέδου ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{A\Gamma}+\mu\overrightarrow{BA}$, να αποδείξετε ότι το M είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$.

3. Έστω O και A δύο σταθερά σημεία του επιπέδου με $|\overrightarrow{OA}|=3$. Ποια γραμμή γράφουν τα σημεία M του επιπέδου για τα οποία είναι $\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{OA})=7$;

4. Δίνονται δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Αν υπάρχει $\lambda \in \mathbf{R}$, τέτοιος, ώστε $|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|=1$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου $ΟΑΓΒ$ με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ είναι μικρότερο ή ίσο του $|\vec{\beta}|$.

5. Έστω O το περίκεντρο τριγώνου $ΑΒΓ$ (δηλαδή το σημείο για το οποίο ισχύει $OA=OB=OΓ$), και έστω, $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τα διανύσματα θέσεως των κορυφών A, B και $Γ$ αντιστοίχως με σημείο αναφοράς το O.

(i) Να δείξετε ότι το σημείο H με διάνυσμα θέσεως $\overrightarrow{OH}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$.

(ii) Να βρείτε το διάνυσμα θέσεως του βαρύκεντρου του τριγώνου $ΑΒΓ$ με σημείο αναφοράς το O.

(iii) Να αποδείξετε ότι το περίκεντρο O, το βαρύκεντρο G και το ορθόκεντρο H ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι συνευθειακά σημεία και ότι G διαιρεί το τμήμα OH σε λόγο $\frac{1}{2}$.

6. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{x}$ του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση $(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{x}$.

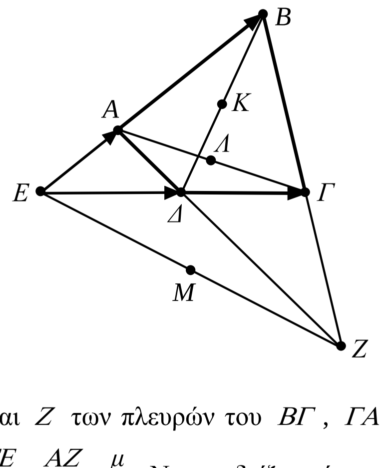
(i) Να αποδείξετε ότι $(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1)(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

(ii) Αν $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\neq 1$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

7. Τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$ οι πλευρές AB και $ΓΔ$ τέμνονται στο E και οι πλευρές $ΒΓ$ και $ΑΔ$ τέμνονται στο Z. Αν $\overrightarrow{EA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{EB}=\kappa\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{EΔ}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{EΓ}=\lambda\vec{\alpha}$, τότε

(i) Να εκφράσετε ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \kappa$ και λ τις διανυσματικές ακτίνες ως προς το E των σημείων $K, Λ$ και M, που είναι μέσα των $BΔ$, $ΑΓ$ και EZ αντιστοίχως.

(ii) Να δείξετε ότι τα σημεία $K, Λ$ και M είναι συνευθειακά.



8. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τα σημεία $Δ, E$ και Z των πλευρών του $ΒΓ$, $ΓΑ$ και AB αντιστοίχως, ώστε να ισχύει $\frac{BΔ}{ΔΓ}=\frac{ΓE}{EA}=\frac{AZ}{ZB}=\frac{\mu}{\nu}$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔEZ$ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο.