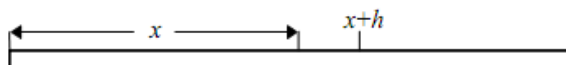

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

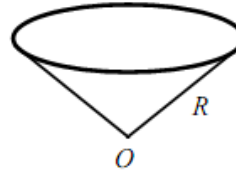
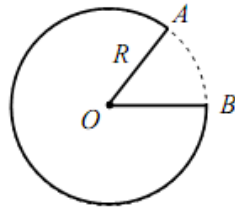
1. Αν μια συμμάτινη ράβδος είναι ομογενής, τότε η γραμμική της πυκνότητα ρ ορίζεται ως η μάζα της ανά μονάδα μήκους $\left(\rho = \frac{m}{\ell}\right)$ και μετριέται σε χιλιόγραμμα ανά μέτρο (kgf/m). Όμως αν η ράβδος δεν είναι ομογενής και η μάζα της μετρούμενη από το αριστερό άκρο της μέχρι το σημείο που απέχει από το άκρο αυτό απόσταση x μέτρα δίνεται από τη συνάρτηση $m = f(x)$, τότε ορίζουμε ως γραμμική πυκνότητα ρ στο σημείο x το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, δηλαδή την παράγωγο της μάζας ως προς το μήκος.



Αν υποθέσουμε ότι για μια ράβδο η μάζα της δίνεται από τη συνάρτηση $m = f(x) = \sqrt{x}$, όπου το x μετριέται σε μέτρα και η μάζα της σε χιλιόγραμμα, να βρεθεί

- i) Η μέση πυκνότητα του τμήματος της ράβδου στο διάστημα $[1, 1,21]$
 - ii) Η γραμμική πυκνότητα της ράβδου για $x = 1$.
2. Το κόστος C της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιοτεχνία που απασχολεί v εργάτες δίνεται από τον τύπο:
- $$C(x) = x^3 - 3vx^2 + 5v^3 \text{ σε χιλιάδες δρχ.}$$
- Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι $16 - v$ χιλιάδες δρχ.
Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.
3. Σε ποίο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;
4. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα δίνεται το σημείο $A(a, \beta)$ του 1ου τεταρτημορίου. Μια ευθεία ε διέρχεται από το A και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα p και q αντιστοίχως. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $p + q$ είναι ίση με $(\sqrt{a} + \sqrt{\beta})^2$.
5. Ποιος κύλινδρος με άθροισμα διαμέτρου και ύψους 20 cm έχει το μέγιστο δυνατό όγκο;
6. Ένα κυλινδρικό δοχείο πρέπει να έχει χωρητικότητα 1lt. Να βρείτε τις διαστάσεις του οι οποίες ελαχιστοποιούν το κόστος του μετάλλου από το οποίο θα κατασκευαστεί το δοχείο.

7. Από έναν κυκλικό δίσκο ακτίνας R αφαιρούμε έναν κυκλικό τομέα OAB και ενώνοντας τις ακτίνες OA και OB κατασκευάζουμε ένα κωνικό ποτήρι. Να βρείτε τη μέγιστη χωρητικότητα του ποτηριού.



8. Αν $C(x)$ είναι το συνολικό κόστος για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος, τότε η συνάρτηση C λέγεται **συνάρτηση κόστους**, το πηλίκο $c(x) = \frac{C(x)}{x}$ λέγεται **μέσο κόστος** και το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}$ λέγεται **οριακό κόστος**.

α) Να αποδείξετε ότι αν για κάποιο x το μέσο κόστος είναι ελάχιστο, τότε ισχύει:

$$\text{οριακό κόστος} = \text{μέσο κόστος}.$$

β) Μια εταιρεία εκτιμά ότι το κόστος (σε δολάρια) για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος είναι $C(x) = \frac{1}{1000} \cdot x^2 + 2x + 2600$.

i) Να βρείτε το κόστος, το μέσο κόστος και το οριακό κόστος για την παραγωγή 1000 μονάδων, 2000 μονάδων και 3000 μονάδων.

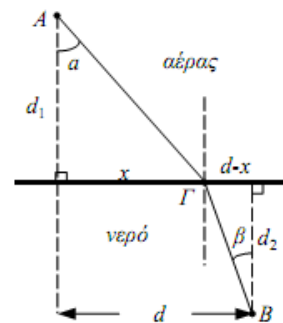
ii) Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής για το οποίο το μέσο κόστος είναι το χαμηλότερο και ποια είναι η ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους;

9. Αν x μονάδες ενός προϊόντος είναι διαθέσιμες για πώληση, τότε η τιμή πώλησης $p(x)$ της μονάδας του προϊόντος λέγεται **συνάρτηση ζήτησης**. Από την πώληση x μονάδων του προϊόντος, τα συνολικά έσοδα είναι $R(x) = x \cdot p(x)$. Η συνάρτηση R λέγεται **συνάρτηση εσόδων** και η παράγωγος R' λέγεται **οριακή συνάρτηση εσόδων**. Επίσης από την πώληση x μονάδων του προϊόντος το συνολικό κέρδος είναι $P(x) = R(x) - C(x)$. Η συνάρτηση P καλείται **συνάρτηση κέρδους** και η παράγωγος P' καλείται **οριακή συνάρτηση κέρδους**.

α) Να αποδείξετε ότι αν το κέρδος για κάποιο x είναι μέγιστο, τότε τα οριακά έσοδα είναι ίσα με το οριακό κόστος.

β) Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη για μια εταιρεία, αν η συνάρτηση κόστους είναι $C(x) = 3800 + 5x - 0,001x^2$ και η συνάρτηση ζήτησης $p(x) = 50 - 0,01x$;

10. Έστω v_1 η ταχύτητα του φωτός στον αέρα και v_2 η ταχύτητα του στο νερό. Σύμφωνα με την **αρχή του Fermat**, μια ακτίνα φωτός από ένα σημείο A του αέρα φθάνει σε ένα σημείο B του νερού ακολουθώντας μια πορεία AGB η οποία ελαχιστοποιεί τον απαιτούμενο χρόνο. Να αποδείξετε ότι



- i) Ο χρόνος που χρειάζεται το φως για τη

$$\text{διαδρομή } AGB \text{ είναι } t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + d_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + d_2^2}}{v_2}$$

- ii) Να υπολογίσετε την $t'(x)$.

- iii) Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} = \frac{v_1}{v_2}$.