

## ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\beta \neq \gamma$ ) με  $\hat{A} = 60^\circ$ , τα ύψη του  $BA$ ,  $\Gamma E$  και τα μέσα  $M$ ,  $N$  των  $AB$ ,  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $ME = NA$ .

**2.** Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και σημείο  $A$  της  $\varepsilon_1$ . Φέρουμε  $AK \perp \varepsilon_2$ . Αν  $B$  σημείο της  $\varepsilon_2$  και μια ευθεία, που διέρχεται από το  $B$ , τέμνει τις  $AK$  και  $\varepsilon_1$  στα  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα, ώστε  $\Delta E = 2AB$ , να αποδείξετε ότι  $\hat{ABK} = 3\hat{EBK}$ .

**3.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ ,  $\Delta$  το μέσο της  $AB$  και σημείο  $E$  της ημιευθείας  $AB$ , ώστε  $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$ . Από τα  $B$  και  $E$  φέρουμε κάθετες στη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{A}$ , οι οποίες τέμνουν την  $A\Gamma$  στα  $B'$  και  $E'$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i)  $B'E' = \frac{A\Gamma - AB}{2}$ .

ii) Η ευθεία  $EE'$  διέρχεται από το μέσο της  $B\Gamma$ .

**4.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 2B\Gamma$ ,  $\hat{B} > 60^\circ$  και το ύψος του  $AE$  προς τη  $B\Gamma$  ( $AE \perp B\Gamma$ ). Αν

**8.** Δίνεται τετράγωνο πλευράς  $a$  και κέντρο  $O$ . Στη διαγώνιο  $A\Gamma$  παίρνουμε σημείο  $M$ , ώστε  $\Gamma M = \frac{A\Gamma}{4}$ .

Φέρουμε τη  $BM$  που τέμνει τη  $\Gamma\Delta$  στο  $E$  και  $OH$  κάθετη στη  $B\Gamma$ , η οποία τέμνει τη  $BE$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

i)  $OZ = \frac{a}{3}$ ,

ii) το  $OZ\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο.

**9.** Οι μη παράλληλες πλευρές  $AD$  και  $B\Gamma$  τραπεζίου  $AB\Gamma\Delta$  τέμνονται κάθετα στο  $O$ . Αν  $K$ ,  $\Lambda$  τα μέσα των

$Z$ ,  $H$  είναι τα μέσα των  $\Gamma\Delta$  και  $AB$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) το  $HB\Gamma Z$  είναι ρόμβος,

ii) η  $ZE$  είναι διχοτόμος της  $\hat{HE\Gamma}$ ,

iii) το  $HE\Gamma Z$  είναι ισοσκελές τραπέζιο,

iv)  $\hat{\Delta Z E} = 3\hat{Z E \Gamma}$ .

**5.** Ευθεία  $\varepsilon$  αφήνει τις κορυφές τριγώνου  $AB\Gamma$  προς το ίδιο μέρος της. Αν  $A'$ ,  $B'$ ,  $\Gamma'$ ,  $K'$  οι προβολές των  $A, B, \Gamma$  και του βαρυκέντρου  $K$  αντίστοιχα στην  $\varepsilon$ , να αποδείξετε ότι  $AA' + BB' + \Gamma\Gamma' = 3KK'$ .

**6.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $\Delta$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Φέρουμε  $\Delta E \perp A\Gamma$ . Αν  $Z$  το μέσο του  $E\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

i)  $\Delta Z \parallel BE$ ,

ii)  $AH \perp BE$ , όπου  $H$  το μέσο του  $\Delta E$ .

**7.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα τετράγωνα  $AB\Delta E$  και  $A\Gamma ZH$ . Αν  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα κέντρα των  $AB\Delta E$  και  $A\Gamma ZH$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $KM\Lambda$  είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

βάσεων  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) τα σημεία  $O$ ,  $K$ ,  $\Lambda$  είναι συνευθειακά,

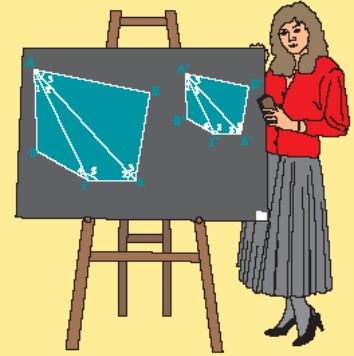
ii)  $K\Lambda = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2}$  (με  $\Delta\Gamma > AB$ ).

iii) αν  $E$ ,  $Z$  είναι τα μέσα των διαγωνίων  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  αντίστοιχα, τότε το  $KE\Lambda Z$  είναι ορθογώνιο.

**10.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , οι διχοτόμοι του  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  και το μέσο  $M$  του  $E\Delta$ . Να αποδείξετε ότι η απόσταση του  $M$  από τη  $B\Gamma$  είναι ίση με το άθροισμα των αποστάσεών του από τις  $AB$ ,  $A\Gamma$ .

## Δραστηριότητες

1. Δύο αδέρφια κληρονόμησαν ένα οικόπεδο σχήματος παραλληλογράμμου, το οποίο έχει την πλευρά  $AB$  παράλληλη προς δημόσιο δρόμο που διέρχεται μπροστά από το οικόπεδο. Πώς θα μοιρασθεί δίκαια το οικόπεδο μεταξύ των δύο αδελφών;



2. Έχουμε 4 ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Τοποθετώντας κατάλληλα το ένα τρίγωνο δίπλα στο άλλο, τι είδους τετράπλευρα κατασκευάζουμε; Να γίνουν τα σχήματα.

3. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα έχουν κέντρο συμμετρίας, ποια έχουν άξονες συμμετρίας και πόσους. Να γίνουν τα σχήματα και να βρεθεί το συμμετρικό των κορυφών τους και των πλευρών τους.

- |                    |                        |
|--------------------|------------------------|
| i) παραλληλόγραμμο | iv) τετράγωνο          |
| ii) ορθογώνιο      | v) τραπέζιο            |
| iii) ρόμβος        | vi) ισοσκελές τραπέζιο |

4. Θεωρούμε ευθεία  $\epsilon$  και ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ . Να υπολογίσετε την απόσταση του μέσου  $M$  του τμήματος, ως συνάρτηση των αποστάσεων των άκρων του  $A$  και  $B$  από την ευθεία  $\epsilon$  (**Υπόδειξη**: Να διακρίνετε περιπτώσεις για τις διάφορες θέσεις των  $A$  και  $B$  ως προς την ευθεία  $\epsilon$ ).

## Εργασία

Σε μια πεδιάδα υπάρχει λόφος  $\Lambda$ , τον οποίο πρόκειται να διασχίσει **ευθεία** σιδηροδρομική γραμμή  $AB\Gamma\Delta$ . Πώς ο μηχανικός θα χαράξει την προέκταση  $\Gamma\Delta$  αυτής πίσω από το λόφο, πριν να γίνει η διάνοιξη της σήραγγας;

