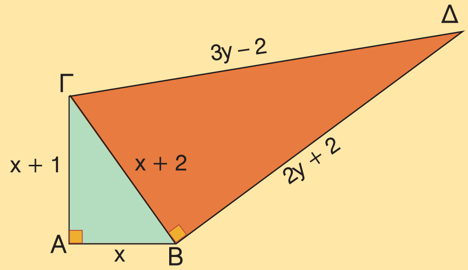
ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Αν $\alpha \neq \beta$, να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x+\alpha)^2 - (x+\beta)^2 = \beta^2 - \alpha^2$ **β)** $\dfrac{x+\alpha}{\beta} - \dfrac{x+\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\beta} - 1.$

2 Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ορθογώνια. Να βρείτε τις τιμές των x, y.



3 Το γινόμενο δύο θετικών διαδοχικών ακεραίων αριθμών, αν διαιρεθεί με το άθροισμά τους, δίνει πηλίκο 7 και υπόλοιπο 23. Να βρείτε τους αριθμούς.

4 Να λύσετε τις εξισώσεις, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \neq 0$.

α) $\dfrac{x}{x-\alpha} + \dfrac{2x}{x+\alpha} = \dfrac{2\alpha^2}{x^2-\alpha^2}$ **β)** $\dfrac{3\alpha}{x^2-\alpha x} + \dfrac{1}{x^2+\alpha x} = \dfrac{6x}{x^2-\alpha^2}$

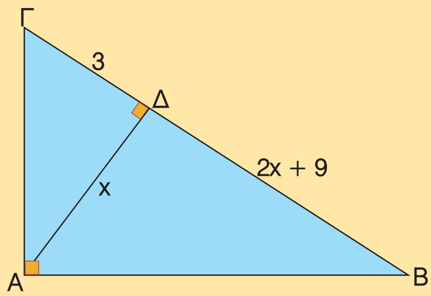
5 Αν μια λύση της εξίσωσης $x^2 + (\lambda - 5)x + \lambda = 0$ είναι ο αριθμός 1, να βρείτε την άλλη λύση.

6 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$, αν είναι γνωστό ότι το $x - 3$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

7 Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς, τέτοιους ώστε το άθροισμα των αντιστρόφων τους αυξημένο κατά τον αντίστροφο του γινομένου τους να είναι ίσο με 1.

8 Να βρείτε τις διαστάσεις ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, αν είναι γνωστό ότι οι πλευρές του διαφέρουν κατά 2 m και το εμβαδόν του οικοπέδου είναι 399 m^2.

9 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του ΑΔ. Αν είναι ΑΔ = x, ΒΔ = 2x + 9 και ΓΔ = 3, να υπολογίσετε τον αριθμό x.



10 Να συγκρίνετε τους αριθμούς $(1+\alpha)(1+\beta)$ και $1+\alpha+\beta$.

11 **α)** Να αποδείξετε ότι $(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 = 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$.

β) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

12 Να αποδείξετε ότι $\frac{4}{\nu(\nu+2)} - \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} > \frac{2}{\nu(\nu+1)}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

13 Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:
α) $\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2 - 2\alpha\beta$ **β)** $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2 + 2\alpha\beta$
γ) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$

14 Να διατάξετε τους θετικούς αριθμούς α, β, γ από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο, αν ισχύει $2007\alpha = 2008\beta = 2009\gamma$.

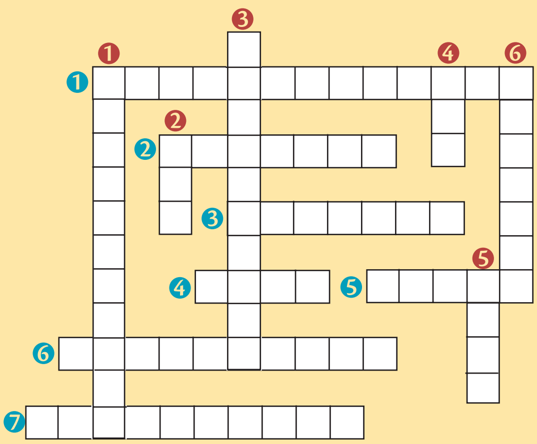
15 Αν $\alpha > 4$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha+1)x^2 - (3\alpha-2)x + \alpha + 1 = 0$ έχει δύο λύσεις άνισες.

16 Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τη σχέση $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 = 0$. (**Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 1995**).

17 Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8$. Για ποιες τιμές των α, β η παράσταση Α γίνεται ελάχιστη; (**Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 2001**).

18 – Ο καθηγητής:
Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x-19}{2001} + \frac{x-17}{2003} + \frac{x-15}{2005} + \frac{x-13}{2007} = 4$.
– Ο μαθητής:
Κύριε, αυτή η εξίσωση ούτε μέχρι το 2020 δε λύνεται.
Εσείς μπορείτε να τη λύσετε;
Υπόδειξη: *Παρατηρήστε ότι* $\frac{x-19}{2001} = \frac{x-2020+2001}{2001} = \frac{x-2020}{2001} + 1$, *κ.τ.λ.*

19 Να λύσετε το σταυρόλεξο



ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ
1. Είναι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$..
2. Ορίζεται μεταξύ πραγματικών αριθμών.
3. Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται για κάθε τιμή του αγνώστου.
4. Ο αριθμός 2 είναι .... της εξίσωσης $x^2 - 5x + 6 = 0$.
5. Είναι η λύση της εξίσωσης $(x-1)^2 = 0$.
6. Η επίλυση μιας εξίσωσης 2ου βαθμού γίνεται και με .... τετραγώνου.
7. Η εξίσωση αυτή περιέχει κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή.

ΚΑΘΕΤΑ
1. Το πρόσημό της καθορίζει το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης 2ου βαθμού.
2. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ με $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ έχει .... λύσεις.
3. Ιδιότητα που ισχύει και στη διάταξη πραγματικών αριθμών.
4. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει .... λύση.
5. Λέγεται και ρίζα μιας εξίσωσης.
6. Είναι η εξίσωση $0x = 7$.