ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$K = \alpha^3 - (1 + \alpha)^{-2} + 4\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2}\right)^{-1} + \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} - 2004\right)^{2004}\right]^0$, αν είναι $\alpha = -\frac{3}{2}$ και $\beta = 3$.

(Διαγωνισμός «Θαλής» Ε.Μ.Ε. 2002).

2 Για κάθε θετικό ακέραιο ν, να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha - \beta + 3\gamma)^{2\nu+1} + (\beta - \alpha - 3\gamma)^{2\nu+1} = 0$ **β)** $(x - y - \omega)^{2\nu} - (y + \omega - x)^{2\nu} = 0$

3 Αν ισχύει $\frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

$A = \frac{4x^2 - 6xy + y^2}{x^2 + y^2}$ $B = \frac{2x^3 - 2xy^2 + 3y^3}{x^2y + y^3}$

4 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -2x^2 + 2x + 800$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(1 - x) = P(x)$.

β) Να βρείτε την αριθμητική τιμή $P(100)$ και $P(-99)$.

5 **α)** Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$.

(Ταυτότητα Euler).

β) Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

γ) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $(x - y)^3 + (y - \omega)^3 + (\omega - x)^3$.

6 Αν $\alpha + \beta = -\frac{1}{3}$ και $\alpha\beta = -\frac{7}{3}$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{43}{9}$ **β)** $(3\alpha + 1)^2 + (3\beta + 1)^2 + 9(\alpha + \beta) = 40$

7 Αν για τους αριθμούς x, y ισχύει μια από τις παρακάτω ισότητες να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι ίσοι ή αντίθετοι.

α) $x^4 - 2y^2 = x^2(y^2 - 2)$ **β)** $x^3 + y^3 = x^2y + xy^2$

8 **α)** Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα $x^2 + 4x + 3$, $x^2 + 2x - 3$.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \frac{1}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$

9 Δίνονται οι παραστάσεις $A = x(x + 3)$ και $B = (x + 1)(x + 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $B = A + 2$ και $AB + 1 = (A + 1)^2$.

β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$.

10 **α)** Το εμβαδόν ενός κύκλου είναι $16\pi x^4 + 8\pi x^2 + \pi$. Να βρείτε την ακτίνα του.

β) Να βρείτε την ακτίνα ενός κύκλου που έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών δύο κύκλων με ακτίνες $4x$ και $4x^2 - 1$.

11 **α)** Αν ο αριθμός κ είναι ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\kappa^2 + \kappa$ είναι άρτιος.

β) Να αποδείξετε ότι η διαφορά κύβων δύο διαδοχικών ακεραίων, αν διαιρεθεί με το 6, δίνει υπόλοιπο 1.

γ) Να αποδείξετε ότι η διαφορά τετραγώνων δύο περιττών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του 8.

12 **α)** Να κάνετε τη διαίρεση $(x^6 - 1) : (x - 1)$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης να αποδείξετε ότι ο αριθμός $7^6 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 6.

β) Να κάνετε τη διαίρεση $(x^5 + 1) : (x + 1)$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2^{15} + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 9.

13 **α)** Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{(x-1)x} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$.

β) Στην προηγούμενη ισότητα να αντικαταστήσετε το x διαδοχικά με τις τιμές 2, 3, 4, ..., 2008 και να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{2007 \cdot 2008} = \dfrac{2007}{2008}$